

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Cleopatra Gherbanovschi

Nicolae Gherbanovschi

FIZICĂ

manual pentru clasa a XI-a

F1

- filiera *teoretică*, profil *real*,
specializarea *matematică-informatică* și *științe ale naturii*
- filiera *vocațională*, profil *militar MApN*,
specializarea *matematică-informatică*

2007



NICULESCU

Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației și Cercetării nr. 4446 din 19.06.2006, în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluarea și Difuzarea Manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordinul Ministrului Educației și Cercetării nr. 3252 din 13.02.2006.

Referenți științifici:

Prof. univ. dr. **Dorin Borșan**

Prof. gr. I **Mihail Curuțiu**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

GHERBANOVSKI, CLEOPATRA

Fizică: manual pentru clasa a XI-a: F1/ Cleopatra Gherbanovschi,

Nicolae Gherbanovschi. – București: Editura

NICULESCU ABC, 2006

ISBN: 978-973-87841-8-5

I. Gherbanovschi, Nicolae

53(075.35)

©Editura NICULESCU ABC, 2007

Adresa: B-dul Regiei 6D

060204 – București, România

Tel: (+40)21-312.97.82

(+40)21-312.97.84

Tel/Fax: (+40)21-312.97.83

Call center: (+40)21-314.88.55

E-mail: club@niculescu.ro

Internet: www.niculescu.ro

Redactor: *Georgeta Vîrtic*

Procesare computerizată: *S.C. Arete Computer & Design S.R.L.*

Tipărit la *SEMNE '94*

ISBN: 978-973-87841-8-5

Capitolul

1

Oscilații și unde mecanice



1.1. Oscilatorul mecanic

1.2. Oscilatori mecanici cuplați

1.3. Unde mecanice

Lecțiile pot fi asistate de calculator cu materialul obținut folosind cuvinte cheie de tipul *pendulum*, *mechanic waves*, *earthquakes* etc. pe pagina <http://www.physics.org/>
Coarde vibrante: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/waves/string.html#c3>

1

Mărimi caracteristice (unități de măsură)

x sau y	– elongația (m)
A	– amplitudinea (m)
$(\omega t \pm \varphi)$	– faza mișcării oscilatorii (rad)
ω	– pulsație – viteza de variație a fazei (rad/s)
v	– viteză de oscilație (m/s)
a	– accelerația de oscilație (m/s ²)
T	– perioada, timpul în care se efectuează o <i>oscilație completă</i> , după care toate mărimile caracteristice – elongația, viteza, accelerația – se repetă identic (s)
ν	– frecvența, numărul de oscilații complete în unitatea de timp (oscilații pe secundă = s ⁻¹ = Hz, hertzi)
v_f	– viteză de fază; viteza de propagare a frontului de undă (m/s)
λ	– lungime de undă – distanța dintre două puncte succesive de egală fază (m)

1.1. Oscilatorul mecanic**1.1.1. Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică**

În jurul nostru observăm o serie de fenomene care se repetă; de exemplu: bătăile inimii, respirația viețuitoarelor, ciclicitatea anotimpurilor, mișcarea Pământului în jurul axei proprii sau în jurul Soarelui, bătăile unei pendule, curentul alternativ, mișcarea unui scrânciob și multe altele.

Fenomenele care se repetă la intervale egale de timp se numesc *fenomene periodice*.

Perioada, T , măsoară acest interval de timp și se măsoară în secunde (s).

Frecvența, ν , arată de câte ori se repetă fenomenul și se măsoară în Hz (s⁻¹).

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Astfel, perioada de rotație a Pământului în jurul Soarelui este un an, în jurul axei sale, o zi, bătăile inimii de pui au o perioadă cuprinsă între 0,4 și 1,3 s.

Mișcarea periodică în jurul unei poziții fixe – numită poziție de echilibru – este o mișcare oscilatorie periodică.

Acesta este cazul pendulei, dar nu și al mișcării Pământului în jurul Soarelui sau a axei proprii.

Definiție

Mișcarea oscilatorie periodică pentru care mărimile caracteristice – elongația, viteza de oscilație, accelerația oscilației – sunt exprimate prin funcțiile armonice sinus sau cosinus, este o mișcare oscilatorie armonică.

Studiul acestei mișcări are o deosebită importanță, ea fiind des întâlnită în natură și în tehnică, de exemplu: pendula, vibrațiile instrumentelor cu corzi, vibrațiile atomilor din molecule sau dintr-o rețea cristalină, vibrațiile moleculelor de aer dintr-o undă sonoră.

Nu numai sistemele mecanice pot oscila. Astfel, în cazul undelor electromagnetice, mărimile care oscilează sunt vectorii asociați unde: intensitate câmp electric și inducție câmp magnetic.

1.1.2. Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii

Oscilațiile mecanice și cele electromagnetice sunt descrise de aceleași ecuații matematice.

Pentru a scrie ecuațiile mișcării oscilatorului linear armonic, studiem concomitent mișcarea circulară uniformă a unui punct material și mișcarea proiecției acestuia pe unul dintre diametre (fig. 1.1).

- **Elongația** este depărtarea la un moment dat față de poziția de echilibru. În reprezentarea din figura 1.1, elongația este egală cu $OP \sin \alpha$.

- Depărtarea maximă față de poziția de echilibru O , se numește **amplitudine** A , după cum se vede în figura 1.1, OP – raza cercului, reprezintă amplitudinea pentru mișcarea oscilatorie a proiecției P' .

În mișcarea circulară, din definiția vitezei unghiulare ω , știm că $\alpha = \omega t$. Pulsatia ω din mișcarea oscilatorie nu are nici o legătură cu viteza unghiulară, chiar dacă cele două mărimi au aceeași notație și aceeași unitate de măsură.

În concluzie, pentru elongație se poate scrie:

$$x = A \sin \omega t.$$

- Dacă punctul material nu pornește chiar din punctul O , atunci la argumentul sinusului se adaugă sau se scade **faza inițială** φ .

- Deplasarea punctului material față de poziția de echilibru, în funcție de timp, este dată de ecuația:

$$x(t) = A \sin(\omega t \pm \varphi) \text{ sau } y(t) = A \cos(\omega t \pm \varphi) \text{ ecuația elongației.} \quad (1.1)$$

Scriem ecuațiile vitezei și accelerației mișcării oscilatorii în funcție de timp; pentru simplificare, vom considera $\varphi = 0$ și proiecția pe diametrul Ox :

- viteza, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$ **ecuația vitezei mișcării oscilatorii;** (1.2)

- accelerația,

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t \text{ **ecuația accelerației mișcării oscilatorii.**} \quad (1.3)$$

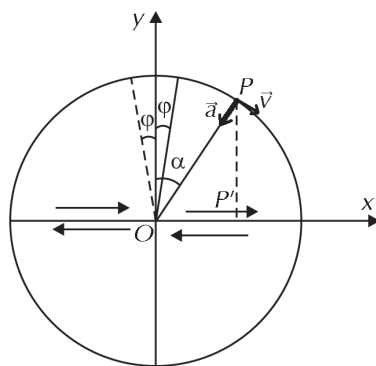


Fig. 1.1

Mișcarea proiecției P' pe diametrul Ox este o mișcare oscilatorie armonică.

Expresiile vitezei și accelerației mișcării oscilatorii se pot obține și prin proiectarea mărimilor viteză liniară și accelerație centripetă din mișcarea circulară pe axele Ox și, respectiv, Oy (fig. 1.1).

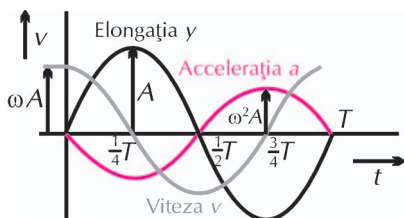


Fig. 1.2 Variația în timp a elongației, vitezei și accelerației pentru o oscilație armonică.

Pentru a reprezenta grafic cele trei mărimi – elongația, viteza și accelerația – punem pe ordonată cele trei mărimi, iar pe abscisă, timpul până la T , deoarece după o perioadă mărimile se repetă identic (fig. 1.2). Tabelul 1 arată valorile acestor mărimi pe parcursul unei perioade, la intervale de $T/4$.

Tabelul 1

timpul	t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
faza	$\omega t = \frac{2\pi}{T}t$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
elongația	$x = A \sin \omega t$	0	A	0	$-A$	0
viteza	$v = A\omega \cos \omega t$	$A\omega$	0	$-A\omega$	0	$A\omega$
accelerația	$a = -A\omega^2 \sin \omega t$	0	$-A\omega^2$	0	$A\omega^2$	0

Întâlnim termenii:

- **amplitudinea vitezei** sau viteza maximă,

$$v_{\max} = |A\omega|;$$

- **amplitudinea accelerației** sau accelerația maximă,

$$a_{\max} = |A\omega^2|.$$

Dacă observăm un pendul simplu (sau gravitațional) – adică un corp greu (considerat punct material) suspendat de un fir inextensibil (pentru ca lungimea să nu se schimbe) – constatăm că pentru acest sistem sunt variabile *distanța față de poziția de echilibru* – **elongație sau amplitudine liniară** – și *unghiul făcut de fir față de poziția inițială a firului* – **elongație sau amplitudine unghiulară**.

1.1.3. Modelul oscilatorului liniar armonic

În cazul unui oscilator armonic, forța este direct proporțională cu elongația, iar frecvența nu depinde de amplitudine.

Oscilațiile mici sunt întotdeauna armonice. Efectele anarmonice apar la oscilații de amplitudine mare.

Un exemplu de **oscilator armonic ideal** este un corp de masă m , legat de un resort având constanta elastică k , liber să se miște pe o suprafață orizontală **fără frecări**. Acesta oscilează sub acțiunea forței elastice $F = -kx$ (fig. 1.3). Oscilațiile pe verticală ale unui asemenea resort au fost studiate în clasa a IX-a.

Pentru a găsi perioada de oscilație, T , scriem principiul fundamental al dinamicii:

$$ma = -kx.$$

Dar:

$$a = -A\omega^2 \sin\omega t \text{ și } x = A \sin\omega t,$$

de unde:

$$-mA\omega^2 \sin\omega t = -kA \sin\omega t,$$

rezultă:

$$m\omega^2 = k \quad (1.6)$$

$$\text{sau } \omega^2 = \frac{k}{m}; \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m};$$

$$\text{obținem } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.7)$$

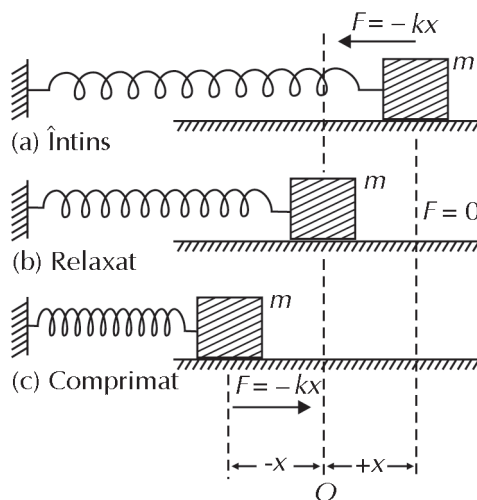


Fig. 1.3

Modelul oscilatorului linear armonic.

Pendulul gravitațional¹

Forța care îl readuce în poziția de echilibru este $F = -mgsin\alpha$. Această forță nu este proporțională cu elongația unghiulară, α , ci cu $sin\alpha$, deci mișcarea rezultantă nu este o mișcare armonică. Însă, dacă unghiul α este mic, $\alpha < 5^\circ$, $sin\alpha \approx \alpha$ și $F = -mg\alpha$.

Acest tip de pendul se numește *pendul gravitațional* sau *pendul simplu*.

Să determinăm perioada unui asemenea pendul de lungime l (fig. 1.4).

Aplicăm legea a II-a a dinamicii:

$$ma = -mgsin\alpha.$$

Semnul (-) arată că pe măsură ce unghiul scade, viteza crește, atingând valoarea maximă în poziția de echilibru.

Însă, în acest caz, $a = -l\omega^2 sin\alpha$, întrucât depărtarea maximă față de poziția de echilibru este l .

Rezultă:

$$-l\omega^2 sin\alpha = -gsin\alpha,$$

$$\text{de unde: } l\omega^2 = g; \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \text{ și}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.8)$$

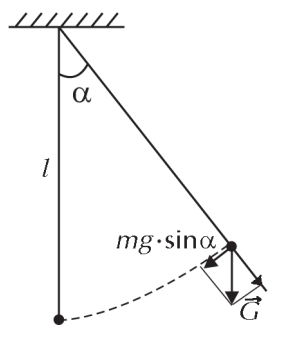


Fig. 1.4

Pendulul gravitațional.

Din relația 1.8, se pot „citi” *legile pendulului gravitațional*:

Legi

Legea 1. Perioada de oscilație nu depinde de natura substanței din care este constituit pendulul (legea substanțelor).

¹ v. <http://www.bsharp.org/physics/stuff/swings.html>, www.gmi.edu/~drussell/Demos/Pendulum/Pendula.html, <http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/viewtopic.php?t=27>

Legea 2. Perioada de oscilație este direct proporțională cu rădăcina pătrată din valoarea lungimii pendulului ($T \sim \sqrt{l}$).

Legea 3. Perioada de oscilație este invers proporțională cu rădăcina pătrată din valoarea accelerației gravitaționale g ($T \sim \frac{1}{\sqrt{g}}$).

Observație: Dacă pendulul este supus și acțiunii altor forțe, în locul accelerației gravitaționale, g , apare accelerația imprimată de rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material de masă m .

Energia oscilatorului armonic

În câmp de forțe conservativ, energia mecanică se conservă:

$$E_t = E_c + E_p.$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2 \cos^2 \omega t}{2}. \quad (1.9)$$

Energia potențială de deformare a resortului este:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \sin^2 \omega t}{2},$$

iar conform relației 1.6:

$$E_p = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t}{2}. \quad (1.10)$$

Deci și energia cinetică și energia potențială sunt **dependente de timp**. Energia totală a oscilatorului armonic este:

$$E_t = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \quad (1.11)$$

și este independentă de timp. În sistemele nedispative **nu se absoarbe energie**, deci amplitudinea și frecvența ν , rămân aceleași (fig. 1.5).

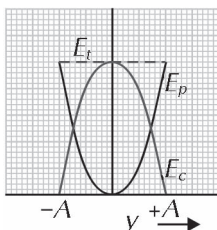


Fig. 1.5 Dependența de elongație a energiei unui oscilator armonic.

Aplicații

1. Un pendul gravitațional este amplasat într-un vagon de tren care se deplasează cu accelerația $\vec{a}$ (fig. 1.6). Să se determine perioada de oscilație a pendulului.

- Din figură se vede că:

$$ma = mgtg\alpha;$$

$$a = gtg\alpha;$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}.$$

Măsurarea unghiului α poate fi folosită ca o metodă de determinare a accelerației de mișcare a vehiculelor: perioada de oscilație se determină măsurând N os-

cilații complete ale pendulului $\left(T = \frac{t}{N}\right)$, lungimea l a pendulului se cunoaște, unghiul de deviere a pendulului, α , se măsoară.

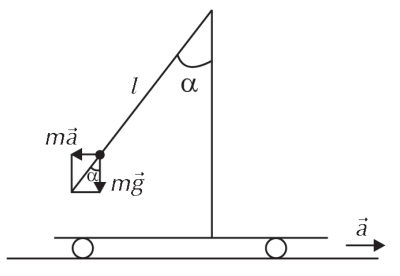


Fig. 1.6

Metodă de determinare a accelerației cu care se mișcă unele vehicule.

2. Un pendul este amplasat într-un lift (fig. 1.7) care se deplasează cu accelerația $\vec{a}$. Să se determine perioada de oscilație a pendulului.

• Când liftul urcă având accelerația $\vec{a}$, (fig. 1.7, a)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + a}}$$

și când liftul coboară cu accelerația $\vec{a}$,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - a}} \quad (\text{fig. 1.7, b}).$$

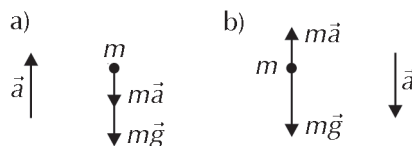


Fig. 1.7

Forțele ce acționează asupra pendulului de masă m :

a – liftul urcă cu accelerația $\vec{a}$;
b – liftul coboară cu accelerația $\vec{a}$.

Experimente

1. Determinarea accelerației gravitaționale cu pendulul simplu

Se măsoară lungimea pendulului gravitațional.

Se scoate pendulul simplu din poziția de echilibru dându-i o amplitudine unghiulară mică ($\sim 5^\circ$); pornind cronometrul, se măsoară timpul în care pendulul execută 10–20 de oscilații complete și se calculează perioada de oscilație, a cărei valoare o folosim pentru a determina valoarea accelerației gravitaționale:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

2. Determinarea constantei elastice, k a unui resort prin metoda statică și prin metoda dinamică

– **Metoda statică.** De un resort se suspendă, pe rând, diferite mase marcate (1 g, 2 g, 3 g, 5 g ș.a.m.d.). Într-un tabel se notează alungirile. Se reprezintă grafic, pe ordonată mg și pe abscisă alungirile (fig. 1.8).

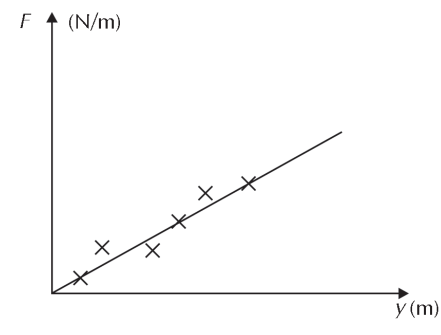


Fig. 1.8

Determinarea
constantei elastice k
prin metoda statică.

Panta dreptei ce trece printre punctele experimentale este $\frac{F}{y} = k$ (N/m).

– **Metoda dinamică.** Se cântărește resortul și masa corpului suspendat (m).

Se pune sistemul în oscilație și se măsoară timpul în care se efectuează N oscilații. Împărțind timpul la numărul de oscilații, se calculează perioada de oscilație T . Dar știm că T este:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}.$$

Pentru același resort, determinarea constantei elastice prin metoda statică și prin metoda dinamică trebuie să ducă la aproximativ același rezultat.

1.1.4. Oscilații mecanice amortizate

Oscilațiile stau la baza conceperii și construcției aparatelor tehnice. Oscilația unei membrane supraelastice asigură obținerea acurateții microfoanelor și difuzoarelor. Ceasurile moderne sunt prevăzute cu cristale de cuarț ale căror oscilații sunt stabile și depind foarte puțin de temperatură. Amortizoarele transformă energia oscilațiilor în căldură, înlăturând oscilațiile dăunătoare.

Oscilațiile unor componente ale mașinilor produc zgomote nedorite. Anumite oscilații uzează materialele și le scad performanțele. Oscilațiile electronilor din rezistoare și tranzistoare sunt responsabile pentru zgomotele din circuitele electronice de amplificare.

În concluzie, pentru realizarea unor aparate sau dispozitive trebuie să se țină seama de părțile pozitive și de cele negative ale oscilațiilor chiar în faza de proiect.

Oscilația poate fi periodică sau cvasiperiodică. Dacă amplitudinea oscilației este constantă în timp, oscilația este **neamortizată**.

Conform principiului fundamental al dinamicii, această mișcare este descrisă de ecuația:

$$ma = -kx,$$

care mai poate fi scrisă sub forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \text{ sau } m\ddot{x} + kx = 0. \quad (1.12)$$

Relația (1.12) este o ecuație diferențială.

În realitate, oscilațiile sunt amortizate. În cazul oscilațiilor mecanice amortizarea se datorează frecărilor, iar în cazul oscilațiilor electrice – rezistenței chimice.

În cazul în care amplitudinea scade lent în timp, oscilațiile sunt *cvasiperiodice*.

La oscilațiile *amortizate* deosebim trei cazuri:

1. Forța de rezistență nu depinde de viteză, $F_R = \mu F_N$ (frecare între diferitele piese solide, frecare în lagăre).

În acest caz, amplitudinea scade liniar în timp (fig. 1.9) și perioada este același cu cea a oscilatorului neamortizat.

La instrumentele cu ac indicator trebuie micșorată cât mai mult frecarea, pentru ca acul să revină cât mai repede la indicația de zero.

2. Forța de rezistență este direct proporțională cu viteza, $\vec{F}_R = -r\vec{v}$.

3. Forța de rezistență este direct proporțională cu pătratul vitezei. Acesta este cazul mișcării într-un mediu vâscos, în regim de curgere turbulentă.

Ne vom opri asupra cazului când forța de rezistență este direct proporțională cu viteza; este situația unui punct material care se deplasează cu o viteză relativ mică, într-un mediu vâscos, în regim de curgere laminară.

Vom considera un oscilator liniar armonic, care oscilează într-un mediu în care întâmpină forța de rezistență

$$F_R = -rv,$$

unde r se numește *coeficient de rezistență*. În SI, r se măsoară în kg/s:

$$[r] = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} = \text{kg/s}.$$

Întrucât asupra sistemului de masă m , care oscilează cu accelerația a , acționează forța elastică și forța de rezistență, mișcarea este descrisă de ecuația:

$$ma = -kx - rv,$$

care mai poate fi scrisă sub forma:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + rv = 0$$

sau $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ (1.13)

În analiza matematică, soluția se găsește de forma:

$$x = Ce^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi).$$

Important de reținut este faptul că amplitudinea scade exponențial cu timpul (fig. 1.10):

$$A = Ce^{-\delta t}.$$

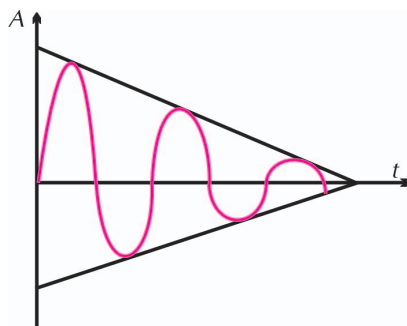


Fig. 1.9

Când forța de rezistență, F_R , nu depinde de viteză, amplitudinea scade liniar în timp.

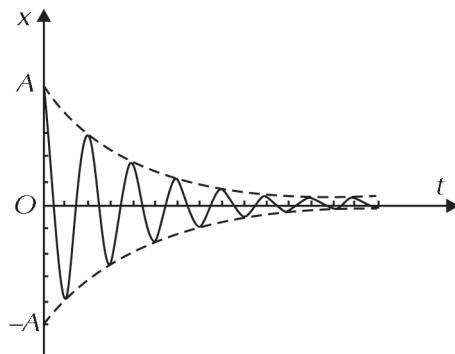


Fig. 1.10

Amplitudinea scade exponențial cu timpul.

1

Mărimea δ se numește *factor de amortizare* și este definită ca fiind:

$$\delta = \frac{r}{2m}, [\delta]_{SI} = s^{-1}.$$

Pulsăția mișcării amortizate este legată de factorul de amortizare prin relația:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Mărimea ω_0 , definită de relația $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, este *pulsăția proprie* a oscilatorului în absența amortizării, iar ω se numește *pseudopulsăție*.

În funcție de mărimea factorului de amortizare, δ , deosebim trei cazuri:
1. $\delta < \omega_0$: în acest caz oscilațiile sunt sinusoidale și se numesc oscilații amortizate *pseudoperiodice* cu *pseudoperioada* T , dată de relația:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

După cum se vede, pseudoperioada este mai mare decât perioada proprie în absența amortizării:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Amplitudinea oscilațiilor amortizate pseudoperiodice scade exponențial în timp (fig. 1.9).

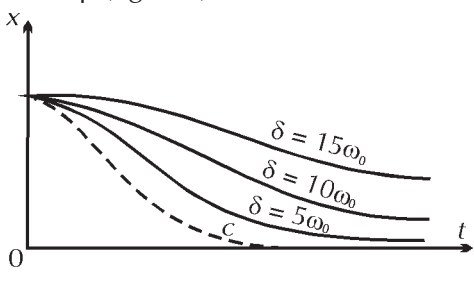


Fig. 1.11

Mișcare amortizată aperiodică.

2. $\delta > \omega_0$: factorul de amortizare este mare și în acest caz mișcarea este *aperiodică*. Deoarece amortizarea este mare, sistemul nu mai poate efectua oscilații și se oprește în poziția de echilibru după un timp cu atât mai îndelungat cu cât amortizarea este mai mare (fig. 1.11). După cum se vede din figură, elongația tinde asimptotic către zero.

3. $\delta = \omega_0$: mișcarea se numește *aperiodică critică*. Deviația decurge mai rapid decât în cazul oscilațiilor periodice sau aperiodice (curba punctată c din figura 1.11). Este trecerea de la oscilații periodice la oscilații aperiodice. Se aplică în cazul aparatelor cu ac indicator, în care deviația finală (indicația acului) trebuie să fie atinsă cât mai rapid.

Amortizarea este importantă în cazul sistemelor mecanice vibrante.

În cazul microfoanelor și difuzoarelor, amortizarea vibrațiilor membranelor asigură o captare și o redare mai fidelă a sunetelor.

1.1.5. Oscilații mecanice întreținute. Oscilații mecanice forțate

Disiparea de energie mecanică a sistemului oscilant prin frecare poate fi compensată prin furnizarea periodică de energie. Sursa energetică poate fi externă sau internă (autoexcitație).

Resortul unui ceasornic sau corpul greu care atârână la o pendulă furnizează energia externă necesară.

Într-un ceas electric, această energie este furnizată de o pilă electrică.

Sistemele mecanice vibrante și multe dintre sursele acustice (generatori de ultrasunete, difuzoare) sunt menținute în stare de oscilație prin forțe periodice externe, numite *forțe excitatoare*.

Considerăm cazul în care sistemul oscilant, numit și *rezonator*, nu influențează în nici un fel forța excitatoare.

În cazul oscilațiilor armonice forța aplicată are forma:

$$F = F_0 \sin \Omega t.$$

La început, rezonatorul este defazat față de forța excitatoare, deoarece mișcarea începe după ce i se transferă energie. Experiența arată că după trecerea unui *regim tranzitoriu* se stabilește un *regim permanent*, în care rezonatorul efectuează *oscilații întreținute* de amplitudine constantă.

1.2. Oscilatori mecanici cuplați

1.2.1. Compunerea oscilațiilor paralele.

(*) Compunerea oscilațiilor perpendiculare

Ca urmare a faptului că un punct material este supus acțiunii mai multor forțe, acesta va efectua o mișcare rezultantă.

Dacă punctul material este supus acțiunii simultane a două forțe care produc oscilații armonice, fenomenele care apar depind de modul în care se efectuează oscilațiile – dacă sunt pe aceeași direcție sau pe direcții perpendiculare între ele – și de raportul frecvențelor celor două oscilații care se compun.

Compunerea oscilațiilor armonice paralele

Prin suprapunerea a două oscilații armonice de aceeași frecvență și aceeași direcție se obține tot o oscilație armonică de aceeași frecvență și aceeași direcție.

Ecuatiile elongațiilor celor două oscilații care se compun, având amplitudini diferite, a_1 și a_2 , și faze inițiale diferite, φ_1 și φ_2 , sunt:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \text{ și } x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Metoda trigonometrică

$$X = x_1 + x_2.$$

Elongația oscilației rezultante X este:

$$X = A \sin(\omega + \varphi).$$

Deci: $A \sin(\omega t + \varphi) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$

Folosind formulele trigonometrice ale sinusului sumei de unghiuri, se obține:

$$A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi = a_1 \sin \omega t \cos \varphi_1 + a_1 \cos \omega t \sin \varphi_1 + a_2 \sin \omega t \cos \varphi_2 + a_2 \cos \omega t \sin \varphi_2$$

sau:

$$A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi = \sin \omega t (a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2) + \cos \omega t (a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2),$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} A \sin \varphi &= a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 \\ A \cos \varphi &= a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}. \quad (1.14)$$

Relația 1.14 exprimă faza inițială a oscilației rezultante, φ , în funcție de amplitudinile și fazele inițiale ale oscilațiilor care se compun.

Amplitudinea oscilației rezultante, A , se obține ridicând la pătrat relațiile pentru $A \sin \varphi$ și $A \cos \varphi$ și adunându-le:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \Delta\varphi. \quad (1.15)$$

$\Delta\varphi$ este diferența de fază dintre oscilațiile care se compun.

Metoda geometrică (metoda fazorilor sau a vectorilor rotitori)

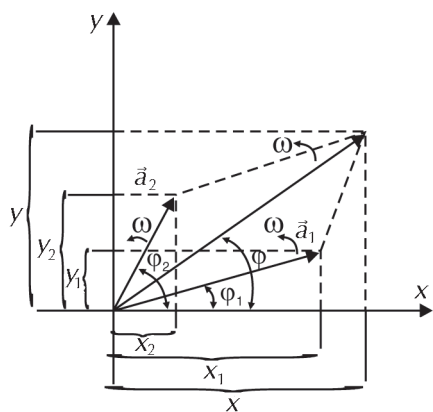


Fig. 1.12

Compunerea vectorilor rotitori care reprezintă mișcări oscilatorii armonice de aceeași pulsație.

Cele două mișcări oscilatorii pot fi reprezentate prin fazorii $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$ care se rotesc cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}$. Vectorul rezultat (fig. 1.12) este:

$$\vec{A} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

iar modulul va fi:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2),$$

adică:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \Delta\varphi.$$

Din figură, rezultă:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

Amplitudinea oscilației rezultante (fig. 1.13) este determinată de valoarea diferenței de fază dintre oscilațiile care se compun.

a) Amplitudinea este maximă dacă $\Delta\varphi = 2k\pi$ și este: $A = a_1 + a_2$ (fig. 1.13, a). Cele două oscilații sunt *în fază*.

b) Dacă $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$, rezultă $A = |a_1 - a_2|$ (fig. 1.13, b). Cele două oscilații sunt *în opoziție de fază*. Dacă $a_1 = a_2$, oscilația se stinge.

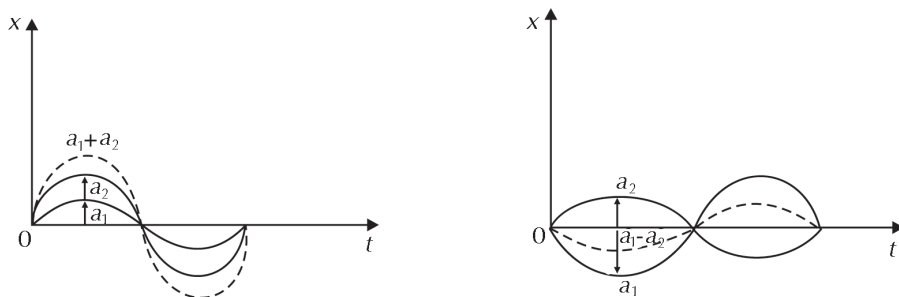


Fig. 1.13 Oscilația rezultantă: a) $A = a_1 + a_2$; b) $A = a_1 - a_2$.

c) În cazurile în care $\Delta\varphi = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, rezultă: $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

În cazul a două oscilații de aceeași direcție, dar de frecvențe diferite, ω_1 și ω_2 , mișcarea nu mai este sinusoidală, dar este periodică.

Dacă frecvențele sunt apropiate apare **fenomenul bățăilor**.

Acest fenomen se folosește la obținerea unor sunete modulate în frecvență (tremolo) la unele instrumente muzicale precum orga sau acordeonul.

În concluzie, **bătăile** sunt fluctuațiile în amplitudine produse de două oscilații cu frecvențe puțin diferite.

(*) **Compunerea oscilațiilor perpendiculare de frecvențe egale**

Presupunem două puncte materiale care oscilează pe direcții perpendiculare și ale căror elongații sunt exprimate prin relațiile:

$$x = A_x \sin(\omega t + \varphi_1) \text{ și } y = A_y \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Dacă: $\varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{A_x}{A_y} \rightarrow y = \frac{A_y}{A_x} x$; mișcarea rezultantă este o dreaptă

a cărei pantă (tangenta) este $\frac{A_y}{A_x}$ (fig. 1.14, a).

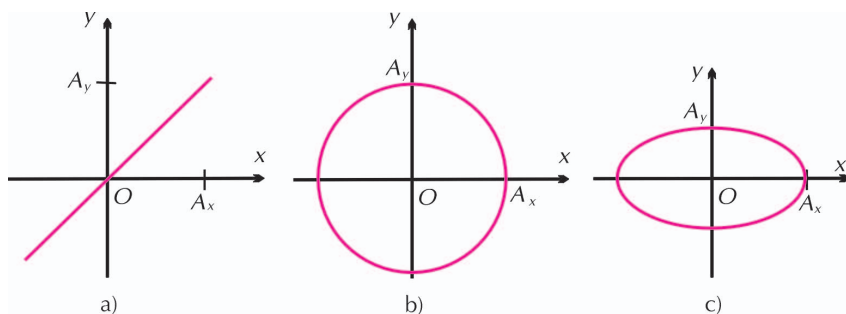


Fig. 1.14 Compunerea a două oscilații perpendiculare.

Dacă: $\varphi_1 \neq \varphi_2$ și $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, iar $\varphi_1 = 0 \rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

$$\left. \begin{aligned} x &= A_x \sin \omega t \\ y &= A_y \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \sin \omega t = \frac{x}{A_x} \\ \cos \omega t = \frac{y}{A_y} \end{cases}$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1 \rightarrow \frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1;$$

mișcarea rezultantă este o elipsă (fig. 1.14, c).

$$\text{Dacă } A_x = A_y = A \text{ și } \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1;$$

mișcarea rezultantă este un cerc (fig. 1.14, b).

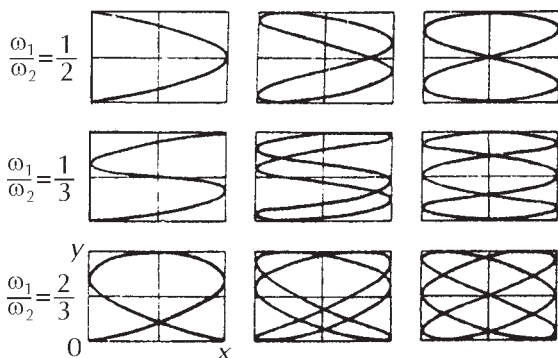


Fig. 1.15 Figurile lui Lissajous.

Dacă frecvențele celor două oscilații perpendiculare diferă, dar sunt în raport de numere întregi, se obțin figuri combinate numite *figuri Lissajous* (fig. 1.15).

Raportul dintre cele două frecvențe, ν_x / ν_y , este dat de numărul punctelor de intersecție a traiectoriei cu cele două axe perpendiculare Ox și Oy .

1.2.2. Rezonanța. Aplicații

În cazul în care rezonatorul influențează oscilatorul, oscilațiile sunt *cuplate*.

Să considerăm un sistem simplu: două pendule gravitaționale identice cuplate printr-un resort fin (fig. 1.16).

Punând unul dintre pendule în oscilație, vom observa că amplitudinea sa scade treptat timp în care începe să oscileze celălalt pendul; amplitudinea acestuia crește, ajungând la maxim atunci când primul pendul ajunge în poziția de echilibru; apoi fenomenul se repetă în sens invers.

Dacă neglijăm frecările, putem considera că sistemul format este izolat și, prin urmare, energia mecanică

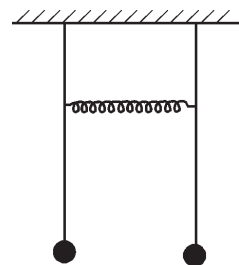


Fig. 1.16 Oscilatori cuplați.

se conservă. Oscilațiile au loc datorită trecerii succesive a energiei sistemului de la un pendul la altul.

Experiment

Un motor electric transformă mișcarea circulară a resortului prins de el într-o mișcare liniară, prin intermediul unui excentric. Cu ajutorul unui reostat se variază turația motorului (fig. 1.17).

Înainte de cuplarea resortului, măsurăm constanta elastică, k , și determinăm pulsația proprie a sistemului format din resort și corpul de masă m , prins de acesta:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

în care m este masa resortului și a corpului.

De resort se prinde un ac indicator, care marchează elongațiile resortului pe o riglă gradată.

Se efectuează întâi măsurătorile pentru oscilația în aer.

Se va observa că pe măsură ce crește turația motorului (excitatorul), crește și amplitudinea oscilațiilor resortului (rezonatorul). La un moment dat, amplitudinea devine maximă, după care scade, deși turația motorului crește în continuare.

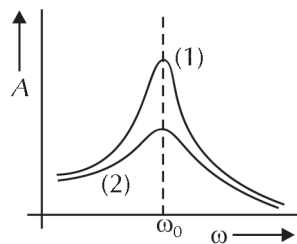


Fig. 1.18 Curba de rezonanță:
(1) frecare mică; (2) frecare mare.

Reprezentând grafic amplitudinile citite pe rigla gradată în funcție de turația motorului, se vor obține curbe asemănătoare cu cele din figura 1.18. Operația se poate repeta și când sistemul oscilează într-un vas cu apă.

Definiție

Fenomenul de rezonanță are loc atunci când frecvența forței excitatoare devine egală cu frecvența proprie a rezonatorului.

În acest moment, amplitudinea devine maximă și transferul de energie de la excitator la rezonator este maxim.

Rezonanța poate fi utilă uneori, alteori, dăunătoare.

Exemple:

- În construcția generatoarelor de ultrasunete se impune transfer maxim de energie, deci frecvența proprie a cristalului de cuarț (rezonatorul) să fie egală cu frecvența forței excitatoare pentru a putea emite ultrasunetul de frecvență dorită.

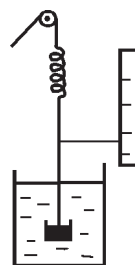


Fig. 1.17 Studiul experimental al fenomenului de rezonanță.

1

• Dacă un număr mare de oameni mășăluiesc în pas cadențat pe un pod suspendat, acesta începe să oscileze. Când frecvența proprie de oscilație devine egală cu frecvența imprimată de pașii cadențați, podul oscilează în rezonanță, amplitudinea devine maximă și acesta se poate rupe.

• Formele și dimensiunile cutiilor instrumentelor muzicale sunt construite în funcție de sunetul care trebuie întărit. Acestea intră în rezonanță când frecvența surselor este egală cu frecvența lor proprie.

• Când se fixează motoare pe suporturi elastice sau pe grinzi, este important ca turația motorului să nu depășească frecvența proprie de vibrație a suporturilor pentru a nu se produce ruperea sau fisurarea acestora.

Probleme rezolvate

1. Ce lungime trebuie să aibă un pendul care bate secunda la București? ($g = 9,8055 \text{ m/s}^2$).

Rezolvare

Un pendul care bate secunda are perioada $T = 2 \text{ s}$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \quad l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}.$$

$$\text{Înlocuind numeric: } l = \frac{4 \cdot 9,80551}{4 \cdot 9,86} = 0,994 \text{ m}.$$

2. Un punct material oscilează după o lege sinusoidală. La momente diferite, elongațiile sunt x_1 și x_2 , iar vitezele corespunzătoare sunt v_1 și v_2 . Să se exprime amplitudinea, A , și pulsația oscilației armonice, ω .

Rezolvare

$$x_1 = A \sin(\omega t_1 + \varphi_1);$$

$$v_1 = A \omega \cos(\omega t_1 + \varphi_1);$$

$$\frac{x_1^2}{A^2} = \sin^2(\omega t_1 + \varphi_1); \quad \frac{v_1^2}{A^2 \omega^2} = \cos^2(\omega t_1 + \varphi_1); \quad \frac{x_1^2}{A^2} + \frac{v_1^2}{A^2 \omega^2} = 1.$$

$$x_2 = A \sin(\omega t_2 + \varphi_2);$$

$$v_2 = A \omega \cos(\omega t_2 + \varphi_2);$$

$$\frac{x_2^2}{A^2} = \sin^2(\omega t_2 + \varphi_2); \quad \frac{v_2^2}{A^2 \omega^2} = \cos^2(\omega t_2 + \varphi_2); \quad \frac{x_2^2}{A^2} + \frac{v_2^2}{A^2 \omega^2} = 1.$$

Rezultă:

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{v_1^2}{A^2 \omega^2} = \frac{x_2^2}{A^2} + \frac{v_2^2}{A^2 \omega^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}; \quad A^2 = x_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2}.$$

Înlocuind în expresia amplitudinii pe ω , obținem:

$$A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}.$$

3. Un corp de greutate G este prins de un resort elastic și așezat pe un plan înclinat de unghi α , ca în figura 1.19. Elongația inițială a resortului este d . Scoțând sistemul din repaus, elongația devine $3d$. Să se scrie ecuația de mișcare, considerând momentul inițial atunci când resortul are lungimea $3d$. Se neglijează frecarea.

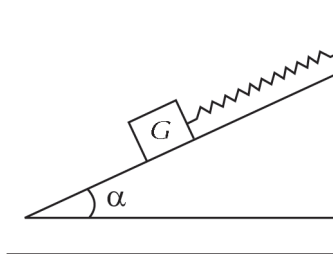


Fig. 1.19

Rezolvare

Ecuția este de forma: $x = A \sin(\omega t + \varphi)$.

Amplitudinea este: $A = 3d - d = 2d$.

Deformarea resortului este produsă de forța $G \sin \alpha$, deci:

$$G \sin \alpha = kd \Rightarrow k = \frac{G \sin \alpha}{d}.$$

La momentul $t = 0$, $x = A$: $A = A \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{d}}.$$

Deci, ecuația oscilației este: $x(t) = 2d \sin\left(\sqrt{\frac{g \sin \alpha}{d}} t + \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Un oscilator armonic de masă $m = 6 \text{ g}$ și constantă elastică $k = 2,4 \text{ N/m}$ are la momentul $t = 0$ o elongație $x = 3 \text{ cm}$ și o viteză inițială $v_0 = 0,7 \text{ m/s}$.

Să se calculeze: pulsația, perioada, amplitudinea, viteza maximă, faza inițială și să se scrie ecuația oscilației.

Rezolvare

Din relația 1.6 știm că:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2,4}{6 \cdot 10^{-3}}} = 20 \text{ s}^{-1}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{20} = 0,314 \text{ s}.$$

Energia totală a oscilatorului la momentul inițial $t = 0$ este:

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv_0^2;$$

înlocuind numeric, se obține: $E = 25,5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$.

1

Energia totală se conservă, deci:

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

de unde putem calcula amplitudinea și viteza maximă.

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{25,5 \cdot 10^{-4} \cdot 2}{2,4}} = 4,61 \text{ cm și } v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25,5 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-3}}} = 0,922 \text{ m/s.}$$

Ecuția oscilației armonice fiind de forma:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\text{la momentul } t = 0 \rightarrow x = A \sin \varphi \rightarrow \sin \varphi = \frac{x}{A} = \frac{3}{4,61} \approx 0,651.$$

Unghiul transformat în radiani dă aproximativ valoarea:

$$\varphi = 0,71 \text{ rad.}$$

Ecuția oscilatorului poate fi scrisă sub forma:

$$x(t) = 4,61 \sin(20t + 0,71) \text{ cm.}$$

Probleme propuse

1.

Pentru problema rezolvată 3, să se exprime momentul la care energia cinetică este egală cu energia potențială.

$$\mathbf{R:} \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{d}{g \sin \alpha}}.$$

2.

Să se scrie ecuația oscilațiilor armonice, cunoscând perioada T , faza inițială φ , energia totală E_t și $F_{\max}$, care pune sistemul în oscilație.

$$\mathbf{R:} x(t) = \frac{2E_t}{F_{\max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right).$$

3.

Platanul de masă $m_1 = 100 \text{ g}$ al unui resort elastic execută pe direcție verticală oscilații armonice de amplitudine $A = 10 \text{ cm}$. Când platanul se află în poziția extremă inferioară, pe el se așază, fără șoc, un corp cu masa $m_2 = 25 \text{ g}$, din care cauză oscilația se oprește brusc. Care este lungimea pendulului gravitațional ce are aceeași perioadă cu perioada oscilațiilor platanului?

$$\mathbf{R:} 0,4 \text{ m.}$$

4.

Un pendul conic este format dintr-un mic corp atârnat de un fir de lungime $l = 1 \text{ m}$. În timpul rotației, firul face unghiul $\alpha = 45^\circ$ cu verticala. Să se calculeze perioada de oscilație a pendulului.

$$\mathbf{R:} \approx 1,67 \text{ s.}$$

5. Ecuația oscilației unui punct material de masă $m = 5 \cdot 10^{-3}$ kg este $x(t) = 5\sqrt{3} \cdot 10^{-2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \omega t \right)$ (m), unde $\omega = 10$ rad/s. Să se determine faza inițială și amplitudinea.

R: $\frac{\pi}{6}$; 10^{-1} m.

6. Care este raportul dintre perioadele de oscilație ale unui corp suspendat de două resorturi, având constantele elastice k_1 și k_2 , legate întâi în serie și apoi în paralel?

R: $\frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k_1 k_2}}$.

7. Un oscilator liniar de masă $m = 0,5$ g este scos din poziția de echilibru până la o distanță $A = 2 \cdot 10^{-2}$ m. Stiind că forța elastică este $F = 1,936$ N, să se calculeze pulsația oscilațiilor și energia totală a oscilatorului în timpul oscilațiilor.

R: 440 Hz; $19,36 \cdot 10^{-3}$ J.

8. Un corp efectuează o mișcare oscilatorie armonică descrisă de ecuația $x = 0,1 \sin \left(2\pi t + \frac{\pi}{4} \right)$ m. Să se determine valoarea maximă a vitezei și a accelerației în cursul oscilației.

R: 0,628 m/s; $3,94$ m/s².

9. Un corp suspendat de un resort execută oscilații armonice. Dacă la momentul t_1 are elongația $y_1 = 10$ cm și la momentul t_2 are elongația este $y_2 = 20$ cm, iar vitezele corespunzătoare acestor momente sunt $v_1 = 0,2$ m/s, respectiv $v_2 = 8 \cdot 10^{-2}$ m/s, care este valoarea amplitudinii și a pulsației?

R: 21,8 cm; 1,06 rad/s.

10. Ne putem imagina molecula de hidrogen (H_2) ca un sistem format din doi atomi legați printr-un resort elastic (fig. 1.20). Centrul resortului (centrul de masă) poate fi considerat fix, astfel încât molecula constă din doi oscilatori ideali identici care oscilează în sensuri opuse. Constanta elastică a resortului este $1,13 \cdot 10^3$ N/m și masa atomului de hidrogen este $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Presupunând că energia totală de vibrație a moleculei este $1,3 \cdot 10^{-19}$ J, să se calculeze amplitudinea vibrației și viteza maximă de vibrație.

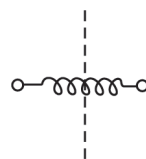


Fig. 1.20

R: $1,07 \cdot 10^{-11}$ m; $8,8 \cdot 10^3$ m/s.

11.

Dopul unei undițe are masa m și diametrul D . După ce peștele a mușcat din momeală și nu s-a lăsat prins, dopul oscilează în jurul poziției lui inițiale de echilibru. Cunoscând densitatea apei, ρ , să se exprime perioada micilor oscilații ale dopului.

$$\mathbf{R:} \quad T = \frac{4}{D} \sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}.$$

12.

Într-un tub în formă de U se află în echilibru o coloană de lichid de lungime l . Suflând la un capăt al tubului se produce o denivelare a lichidului din cele două ramuri. Să se exprime perioada oscilațiilor coloanei de lichid.

$$\mathbf{R:} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

13.

Un pendul gravitațional de lungime $l = 49$ cm este cufundat într-un lichid a cărui densitate reprezintă $n = 0,6$ din densitatea corpului suspendat. Să se calculeze perioada micilor oscilații ale pendulului, neglijând rezistența întâmpinată în lichid ($g = 10$ m/s²).

$$\mathbf{R:} \quad 2,198 \text{ s.}$$

14.

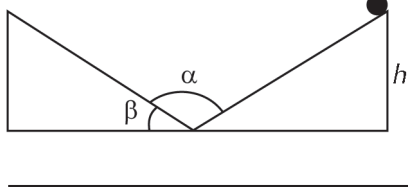


Fig. 1.21

O bilă alunecă liber de la înălțimea $h = 20$ cm pe un plan înclinat care face unghiul $\alpha = 120^\circ$ cu un alt plan înclinat de unghi $\beta = 30^\circ$ (fig. 1.21). Să se calculeze frecvența de oscilație a bilei, neglijând frecarea și considerând $g = 10$ m/s².

$$\mathbf{R:} \quad 0,56 \text{ Hz.}$$

15.

Într-un cilindru orizontal cu lungimea $2l$, închis la ambele capete, se află un piston mobil, cu masa m , situat la mijlocul cilindrului. În fiecare compartiment se află v moli de gaz ideal, la aceeași temperatură T . Deplasând pistonul din poziția de echilibru cu o distanță foarte mică x și lăsându-l liber, el oscilează cu perioada $\tau = 1$ s. Să se exprime temperatura T , presupunând că aceasta rămâne constantă.

$$\mathbf{R:} \quad T = \frac{2\pi^2 m l^2}{v R \tau^2}.$$

1.3. Unde mecanice

1.3.1. Propagarea unei perturbații într-un mediu elastic. Transferul de energie

Undele mecanice, printre care undele sonore, undele seismice, se propagă în medii elastice sau deformabile.

Undele mecanice sunt generate de o perturbație mecanică ce se propagă într-un mediu elastic. Pentru propagarea acestora este necesară existența unui mediu natural, spre deosebire de cazul undelor electromagnetice care se propagă și în vid.

Perturbația pune în oscilație particulele mediului, iar energia lor se transmite de la o porțiune de substanță la porțiunea vecină, fără deplasarea substanței. *Unda transportă energie fără să transporte substanță.*

De exemplu, micile obiecte care plutesc pe suprafața unduitoare a apei arată că mișcarea reală a diferitelor porțiuni de apă este o ușoară deplasare în sus și în jos, înainte și înapoi. Undele de apă se mișcă progresiv pe suprafața apei, transferând energie obiectelor plutitoare, punându-le astfel în mișcare.

Definiție

Dacă mișcările particulelor materiale sunt perpendiculare pe direcția de propagare a undei, unda se numește *transversală*. Dacă mișcările particulelor au loc pe direcția de propagare a undei, unda se numește *longitudinală*.

În fluide (gaze și lichide) se propagă numai unde longitudinale. În mediile elastice solide (cablu de cauciuc, coardă, bare) se propagă și unde longitudinale și unde transversale.

După numărul de dimensiuni în care ele propagă energia, undele pot fi: *unidimensionale* (de-a lungul unei corzi), *bidimensionale* (undele de suprafață produse prin căderea unei pietricele într-un lac) și *tridimensionale* (undele emise radial de la o sursă – undele sonore).

Să considerăm o perturbație tridimensională. Prin toate punctele care suferă aceeași perturbație la un moment dat se poate duce o suprafață. Această suprafață se mișcă, indicând cum se propagă perturbația. Dacă perturbația este periodică, așa cum se întâmplă deseori, punctele care oscilează la fel sunt puncte de egală fază. Putem trasa suprafețe de egală fază sau suprafețe de undă. Dacă mediul este omogen și izotrop, direcția de propagare este întotdeauna perpendiculară pe suprafața de undă.

Definiție

Linia perpendiculară pe suprafețele de undă, care indică direcția de propagare a undei, se numește *rază*. Suprafața mai îndepărtată de sursă se numește *front de undă*.

Dacă perturbațiile se propagă într-o singură direcție, undele se numesc *unde plane*. Suprafețele de undă sunt plane și razele sunt linii drepte paralele (fig. 1.22, a).

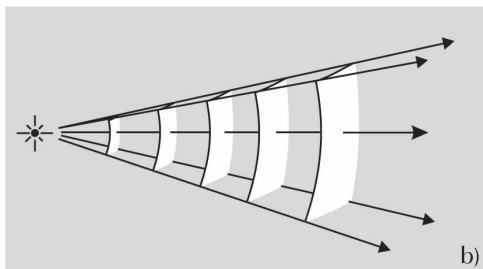
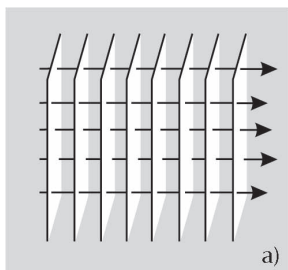


Fig. 1.22

a – O undă plană. Planele reprezintă fronturile de undă distanțate cu o lungime de undă între ele, iar săgețile reprezintă razele. b – O undă sferică. Razele sunt radiale, iar fronturile de undă, distanțate cu o lungime de undă între ele, formează pături sferice. Departate de sursă, mici porțiuni ale fronturilor de undă devin aproape plane.

Dacă sursa este punctiformă sau sferică, suprafețele de undă sunt sfere, iar razele sunt liniile radiale care pleacă în toate direcțiile; acestea sunt *unde sferice* (fig. 1.22, b).

Definiție

Distanța dintre două puncte succesive de egală fază se numește lungime de undă și se notează cu λ .

Într-o perioadă, unda parcurge distanța λ , deci viteza de parcurgere a frontului de undă, numită *viteză de fază*, v_f , este:

$$v_f = \frac{\lambda}{T}. \quad (1.16)$$

Viteza de propagare a undei

Pentru a nu confunda viteza v , cu care oscilează o particulă, cu viteza de propagare a undei, vom nota pe cea din urmă cu c , ea nefiind egală cu viteza luminii în cazul undelor mecanice. Atunci, lungimea de undă λ este distanța parcursă de undă într-o perioadă T , cu viteza de propagare c :

$$\lambda = cT = \frac{c}{v}. \quad (1.17)$$

Viteza de propagare a undei depinde de natura undei, dacă este longitudinală sau transversală, și de natura (densitatea) și elasticitatea mediului în care se propagă.

– *Viteza undelor longitudinale în solide*, c_l , este dată de relația:

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1.18)$$

unde: E este modulul lui Young și ρ densitatea mediului în care se propagă unda.

– *Viteza undelor transversale într-o coardă*, c_t , este dată de relația:

$$c_t = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (1.19)$$

Pentru o coardă întinsă, elasticitatea ei este măsurată de tensiunea din coardă, F . $\mu = \frac{m}{l}$ reprezintă masa pe unitatea de lungime a corzii.

1.3.2. Modelul undă plană. Periodicitatea spațială și temporală

Oscilația este mișcarea unui oscilator, și elongația depinde doar de timp. Într-o undă participă mai mulți oscilatori. În acest caz, elongația este dependentă și de timp și de poziția față de sursa care a produs perturbația. Oscilatorii rămân pe loc; propagarea undei este legată de transport de energie, nu de transport de materie.

Ecuția undei plane

Dacă un capăt al unei coarde oscilează cu o mișcare armonică, toate celelalte puncte oscilează la fel, cu aceeași amplitudine și frecvență, dar cu faze diferite, în diferite puncte.

O particulă aflată în origine ($x = 0$) oscilează armonic după legea:

$$y(t, 0) = A \sin \omega t.$$

Ne interesează cum oscilează un punct aflat la distanța x de sursă. El va intra mai târziu în oscilație și elongația lui va depinde de timp, dar și de distanța x față de sursă:

$$y(t, x) = A \sin \omega(t - t'),$$

unde t' este timpul în care unda se propagă pe distanța x cu viteza ei de propagare, c :

$$t' = \frac{x}{c}.$$

Deci:
$$y(t, x) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (1.20)$$

Această funcție este *ecuția undei plane*. Deci, unda este un fenomen periodic în timp și spațiu.

Argumentul sinusului, *faza undei*, poate fi exprimată în diferite moduri:

$$2\pi \nu \left(t - \frac{x}{c} \right) = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right) = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (1.21)$$

Ultima expresie a fazei din relația 1.21 este deseori folosită, întrucât, faza inițială a undei fiind $\frac{2\pi}{\lambda} x$, diferența de fază dintre două unde este:

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x. \quad (1.22)$$

1.3.3. Reflexia și refracția undelor mecanice. Unde seismice

Principiul lui Huygens

Huygens consideră că unda sferică este forma fundamentală a tuturor tipurilor de undă și, ca atare, o numește **undă elementară**.

Aceste unde nu pleacă numai de la o sursă punctiformă, ci fiecare punct situat pe un front de undă poate fi considerat ca sursă de unde identice cu unda inițială.

Principiul lui Huygens

Fiecare punct al unui front de undă poate fi considerat sursă de noi unde elementare, care se propagă cu aceeași viteză și lungime de undă ca unda inițială. Înfășurătoarea tuturor undelor elementare (secundare) reprezintă noul front de undă.

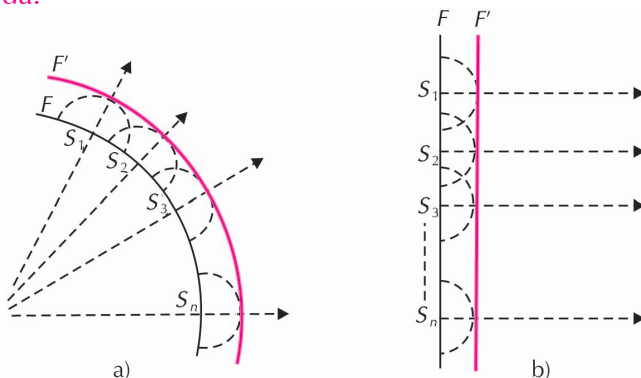


Fig. 1.23 Principiul lui Huygens. Construirea fronturilor de undă pentru unde sferice (a) și pentru unde plane (b).

În figura 1.23 se arată cum se construiesc fronturile de undă pe baza *principiului lui Huygens*.

Dacă, în propagarea lor printr-un mediu, undele întâlnesc un alt mediu (al doilea), ele se pot *reflecta* pe suprafața dintre cele două medii, adică își pot schimba direcția, întorcându-se în mediul din care au venit, sau pot pătrunde în mediul al doilea, schimbându-și direcția, adică, se *refractă*. Cele două fenomene se produc simultan.

Legile reflexiei și refracției se deduc pe baza principiului lui Huygens.

Legea reflexiei

Considerăm unda plană incidentă al cărei front de undă este AB (fig. 1.24).

Când punctul A al frontului de undă atinge suprafața de separare a celor două medii, în punctul A' , acest punct devine sursă de unde secundare care se propagă în același mediu. În intervalul de timp în care unda incidentă parcurge drumul B_1B' , unda elementară s-a extins la un cerc de rază $A'B''$. Noul front de undă al undelor reflectate $A'A_2$ și $B'B_2$ este planul $B'B''$, tangent suprafețelor

Rezultă:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Definiție

Raportul $\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$ se numește *indice de refracție relativ* al mediului doi față de primul mediu.

Legea refracției

Raportul dintre sinusul unghiului de incidență și sinusul unghiului de refracție este egal cu indicele de refracție relativ al mediului doi față de primul mediu:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.24)$$

În cazul undelor mecanice, în medii de densități mai mari, viteza de fază este mai mare.

Unde seismice

Propagarea vibrațiilor în scoarța Pământului dă naștere *undelor seismice*. Analiza undelor seismice oferă informații despre structura scoarței terestre. Structura Pământului constă din straturi concentrice, ale căror densități și module de elasticitate sunt diferite. Undele seismice sunt reflectate și refractate la interfețele dintre aceste straturi.

Structura internă a Pământului are trei învelișuri principale: *nucleul* – care cuprinde un miez solid învelit într-un miez lichid – *mantaua* și *scoarța* (sau *crusta*) – care are grosimea de 32 km sub continente și 8 km sub ocean.

Undele seismice sunt generate, în cea mai mare parte dintre cazuri, (95%), în interiorul Pământului.

După mecanismele de generare, cutremurele sunt: de natură tectonică (90%; în România 95%), de natură mecanică (7%) și 3% din cauze locale (diferite prăbușiri carstice, explozii provocate de om).

Cutremurele tectonice se declanșează când tensiunile și energiile acumulate în timp, în scoarță, produc ruperea bruscă a rocilor.

Grosimea plăcilor tectonice este în jur de 100–200 km, cuprinzând crusta și o parte din manta. Zonele de margine ale plăcilor tectonice sunt caracterizate printr-un grad ridicat de seismicitate. Fenomenul de subducție (alunecarea relativă a unei plăci sub cealaltă) explică cutremurele de mare adâncime și formarea valurilor uriașe numite „tsunami”.

În cazul plăcilor de tip continental, fenomenul de subducție nu are lor; are însă loc fenomenul de falieri. Planurile de rupere se numesc falii. Locul

unde se produce ruptura se numește *focar* sau *hipocentru*. Punctul de la suprafața Pământului, aflat pe verticala focarului, se numește *epicentru*.

Cutremurele se mai clasifică în funcție de distanța dintre epicentru și focar (adâncime sau profunzime):

- 70% din totalul cutremurelor înregistrate sunt cutremure de suprafață de scurtă durată și sunt violente. Ele se produc la o adâncime cuprinsă între 0 și 70 km. Adâncimea medie este de 33 km.

- Cutremurele intermediare sunt în procent de 25% și profunzimea este cuprinsă între 60 și 100 km.

- La adâncimi de peste 150 km, au loc cutremurele de adâncime, cu un procent de 5% din numărul total de cutremure.

Undele seismice sunt unde elastice. Mecanismul de propagare este același cu cel al propagării undelor sonore în aer.

Perioada undelor seismice este mai mare de 0,1 s. Frecvența lor este cuprinsă în intervalul 15–25 Hz. Amplitudinea undelor seismice este cuprinsă între 10^{-6} m și câțiva metri.

Într-un cutremur iau naștere trei tipuri de unde:

- unde primare (*P*), care sunt longitudinale;
- unde secundare (*S*), care sunt transversale;
- unde de suprafață, numite unde lungi (*L*).

Undele de suprafață sunt, la rândul lor, de două tipuri:

- unde Love – deplasările particulelor sunt transversale;
- unde Rayleigh – particulele oscilante descriu traiectorii eliptice.

Undele de suprafață se formează prin interferența undelor transversale și longitudinale care ajung la suprafața Pământului sub un unghi mic.

Vitezele de propagare ale celor trei unde diferă. Undele *P* sosesc primele, apoi sosesc undele *S* și la urmă undele Love și Rayleigh. Amplitudinea undelor *S* este mai mare ca a undelor *P*.

Viteza de propagare depinde de natura mediilor din interiorul Pământului prin care se propagă undele. Viteza de propagare a undelor *P* este în jur de 5 km/s în scoarța Pământului și de 14 km/s la adâncimi mari. Viteza de propagare a undelor *S* este cuprinsă între 3 și 8 km/s.

Undele transversale *S* nu se propagă prin învelișul lichid.

Energia totală eliberată într-un cutremur ajunge la valori de 10^{17} – 10^{18} J. Energia unui cutremur poate fi evaluată prin:

Intensitatea macroseismică – este echivalentă cu gradul de distrugere.

Există mai multe scări. Unele pornesc de la 1 grad la 10 grade, altele, de la 1 grad la 12 grade. În toate scările, cutremurele de gradul 1 sunt cele mai slabe, iar cele mai puternice corespund gradului maxim.

În majoritatea cazurilor se utilizează scara de 12 grade.

Intensitatea macroseismică este cea pe baza căreia se elaborează normele de protecție antiseismică a construcțiilor.

1

Magnitudinea (sau intensitatea Richter). Ea dă măsura energiei undelor seismice. Scara Richter are limita superioară 9. Ea este o scară logaritmică, magnitudinea fiind dată de formula:

$$M = 0,67 \cdot \log E - 2,9$$

unde E este energia, exprimată în J.

De exemplu, dacă energia este de 10^{17} J, $M \approx 8,5$ (valoarea magnitudinii marelui cutremur din San Francisco din anul 1906).

Din focar, undele seismice se propagă radial în toate direcțiile, dar nu în linie dreaptă, ci după traiectorii curbe în urma refracțiilor suferite.

Odată ajunse la suprafața Pământului, undele seismice produc oscilații; acestea sunt înregistrate de stațiile seismice aflate în diferite puncte de pe Pământ.

Instrumentul care înregistrează mișcările oscilatorii ale solului, ca urmare a propagării undelor seismice, se numește **seismograf**.

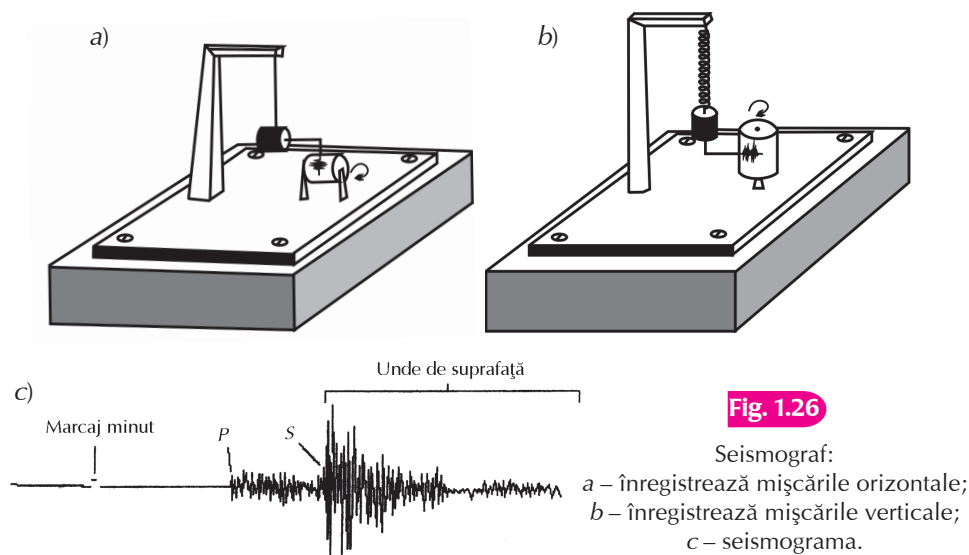
Seismografele sunt de două tipuri. Cele care înregistrează mișcări pe verticală și cele care înregistrează mișcările orizontale dispuse pe direcțiile est-vest, nord-sud.

Seismografele verticale înregistrează undele P și Rayleigh și cele orizontale, undele S și Love.

În stațiile seismice sunt trei seismografe: două sunt așezate în plan orizontal și unul în plan vertical.

În principiu, un seismograf este un corp greu, suspendat de un resort prins pe un cadru. Corpul este menținut într-o poziție staționară cu ajutorul unor dispozitive de amortizare, în timp ce cadrul și suportul se mișcă sub acțiunea unei unde seismice (fig. 1.26, a, b).

De corpul suspendat se atașează o peniță care înregistrează **seismograma** pe o hârtie care se mișcă uniform (fig. 1.26, c).



Ilustrarea animată a funcționării unui seismograf se poate vedea în *How a Seismograph Works*, pe pagina www.wwnorton.com/earth/egeo/animations/ch8.htm#2.

Din seismograme se determină:

- latitudinea și longitudinea epicentrului;
- adâncimea focarului;
- magnitudinea undelor seismice;
- amplitudinea și perioada.

1.3.4. Interferența undelor mecanice. Unde staționare

Definiție

Suprapunerea a două sau mai multe unde se numește interferență.

Pentru simplificare, alegem amplitudinile celor două unde egale și scriem ecuațiile undelor sub forma:

$$y_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right); \quad y_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right);$$

$$y_1 + y_2 = A \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) \right].$$

Aplicând formula trigonometrică:

$$\sin a + \sin b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2},$$

rezultă:

$$y_1 + y_2 = 2A \cos 2\pi \frac{\Delta x}{2\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right).$$

Rezultatul interferenței se apreciază după intensitate, care este direct proporțională cu energia, iar energia oscilatorilor este direct proporțională cu pătratul amplitudinii.

Pătratul amplitudinii (termenul care nu depinde de timp) este:

$$4A^2 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x.$$

Pentru a obține un **maxim**:

$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x = 1; \quad \frac{\pi}{\lambda} \Delta x = k\pi \Rightarrow \Delta x = k\lambda,$$

adică, diferența de drum dintre cele două unde trebuie să fie un număr întreg de lungimi de undă.

Pentru un **minim**:

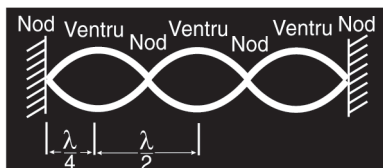
$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x = 0; \quad \frac{\pi}{\lambda} \Delta x = (2k+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta x = (2k+1) \frac{\lambda}{2};$$

diferența de drum dintre cele două unde trebuie să fie un număr impar de semiunde.

1

Unde staționare¹**Definiție**

Undele staționare se formează la interferența a două unde de aceeași amplitudine și aceeași frecvență, care se propagă pe aceeași direcție, dar în sensuri opuse.

**Fig. 1.27**

Imaginea unei unde staționare.

Locurile unde punctele mediului oscilează cu amplitudine maximă se numesc **ventre** și locurile în care oscilația este complet stinsă se numesc **noduri** (fig. 1.27).

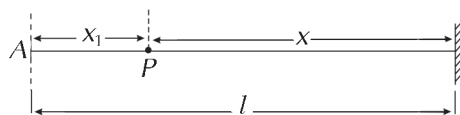
Poziția acestor noduri și ventre rămâne „staționară”.

Suprapunerea unei unde incidente și a unei unde reflectate dă naștere unei unde staționare.

Ecuația unde staționare

Considerăm o sârmă de lungime l încastrată la unul dintre capete. Perturbația produsă în punctul A se propagă până la perete și se reflectă.

Presupunem că în punctul P are loc suprapunerea celor două unde, incidentă și reflectată (fig. 1.28). Scriem ecuațiile unde incidente și unde reflectate:

**Fig. 1.28**

Pentru deducerea ecuației unde staționare.

$$y_i = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) \text{ și } y_r = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l + x + \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \right).$$

S-a avut în vedere că pe mediul mai dens reflexia are loc cu pierdere de $\frac{\lambda}{2}$.

$$\text{La suprapunere: } y_i + y_r = A \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l + x + \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \right) \right]. \quad (1.25)$$

Aplicând relația trigonometrică $\sin a + \sin b$, obținem:

$$y_i + y_r = 2A \cos 2\pi \left(\frac{l + x + \frac{\lambda}{2} - x_1}{2\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l + x + \frac{\lambda}{2} + x_1}{2\lambda} \right).$$

¹ v. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/waves/standw.html#c1>

Observăm din figura 1.28 că:

$$l - x_1 = x \text{ și } x + x_1 = l;$$

atunci **ecuația undei staționare** este:

$$y_i + y_r = \underbrace{2A \cos \frac{\pi}{\lambda} \left(2x + \frac{\lambda}{2} \right)}_{\text{amplitudinea}} \underbrace{\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} \right)}_{\text{faza}}. \quad (1.26)$$

Pentru a găsi *pozițiile ventrelor (abscisele acestora)* x_v , impunem pătratului amplitudinii condiția de maxim:

$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \left(2x + \frac{\lambda}{2} \right) = 1; \quad \frac{\pi}{\lambda} \left(2x + \frac{\lambda}{2} \right) = k\pi \Rightarrow x_v = (2k - 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Deci, la distanțe egale cu un număr impar de $\frac{\lambda}{4}$, de la punctul de prindere se găsește un ventru (vezi fig. 1.28).

Impunând condiția de minim pătratului amplitudinii, găsim *pozițiile nodurilor* x_N :

$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \left(2x + \frac{\lambda}{2} \right) = 0; \quad \frac{\pi}{\lambda} \left(2x + \frac{\lambda}{2} \right) = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_N = k \frac{\lambda}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Primul nod se găsește în punctul de fixare, iar celelalte, la distanțe egale cu un număr întreg de $\frac{\lambda}{2}$.

Formele de oscilație ale undei staționare diferă după cum este prinsă bara.

1. Sistem cu ambele capete fixe (fig. 1.29, a)

Forma cea mai simplă a undei staționare se numește **oscilație fundamentală**. Se vede că lungimea l a barei este

$$l = \frac{\lambda_0}{2} \text{ sau } \lambda_0 = 2l,$$

iar $v_0 = \frac{c}{2l}$ se numește **frecvență fundamentală** (cea mai mică frecvență).

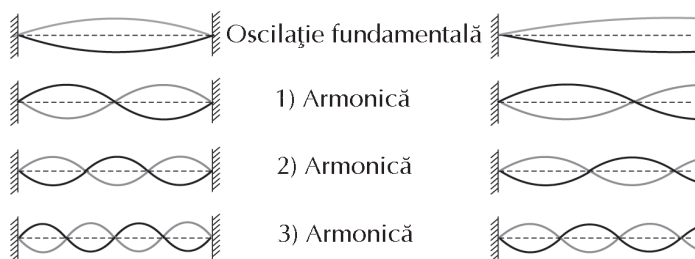


Fig. 1.29

Unde staționare: a – reprezentarea grafică la două capete fixe; b – Reprezentarea grafică la un capăt fix și unul liber.

1

Multiplii întregi ai frecvenței fundamentale sunt *armonicele*.

2. Sistem cu un capăt fix și unul liber (fig. 1.29, b)

La capătul fix se formează un nod și la capătul liber un ventru.

În acest caz, lungimea barei este: $l = \frac{\lambda_0}{4}$ sau $\lambda_0 = 4l$ și frecvența funda-

mentală $v_0 = \frac{c}{4l}$.

Problemă rezolvată

O undă longitudinală se propagă pe direcția Ox într-un mediu elastic de densitate $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$, după legea:

$$y_1 = 1,2 \sin \left(1000\pi t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \text{ cm.}$$

Diferența de fază între două puncte aflate pe axa Ox , la distanța $\Delta x = 3,2 \text{ m}$, este $\Delta\varphi = 4\pi/5$. Să se calculeze:

a) dependența de timp a energiei cinetice, a energiei potențiale și a energiei totale a unui punct material de masă $m = 1 \text{ g}$, care oscilează după legea y_1 în punctul de abscisă $x = 0$;

b) lungimea de undă, frecvența și viteza de propagare a undei longitudinale;

c) modulul de elasticitate a mediului elastic în care se propagă unda cu ecuația y_1 ;

d) amplitudinea și defazajul oscilației rezultante prin compunerea în punctul de abscisă $x = 1 \text{ m}$ a oscilației y_1 și a oscilației y_2 care, în punctul

respectiv, are forma $y_2 = 1,2 \sin \left(1000\pi t - \frac{\pi}{4} \right) \text{ cm.}$

Rezolvare

$$\text{a) } E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2 \omega t ; A = 12 \cdot 10^{-3} \text{ m și } \omega = 10^3\pi.$$

Înlocuind numeric, se obține:

$$E_c(t) = \frac{10^{-3} \cdot 12^2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 \cdot 9,86}{2} \cos^2 1000\pi t = 0,71 \cos^2 1000\pi t \text{ (J)},$$

$$E_p = \frac{ky_1^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2 \omega t.$$

$$\text{Înlocuind numeric: } E_p(t) = 0,71 \sin^2 1000\pi t \text{ (J)}, E_t = E_c + E_p = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Numeric: $E_t = 0,71 \text{ J}$.

$$\text{b) Din relația: } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi \Delta x}{\Delta\varphi}.$$

$$\text{Înlocuind numeric: } \lambda = \frac{2\pi \cdot 3,2}{\frac{4\pi}{5}} = 8 \text{ m.}$$

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = 500 \text{ Hz. } \lambda = \frac{c}{v}; c = \lambda v \Rightarrow c = 8 \cdot 500 = 4000 \text{ m/s.}$$

c) Din relația pentru viteza de propagare a undelor longitudinale în solide:

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow E = c^2 \rho.$$

Valoarea numerică a modului lui Young este: $E = 16 \cdot 10^6 \cdot 2600 = 416 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

$$\text{d) Oscilația } y_1 \text{ are forma } y_1 = 1,2 \sin\left(1000\pi t - \frac{\pi}{4}\right), \text{ deoarece } \frac{2\pi}{\lambda} x = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{O compunem cu oscilație } y_2: y_2 = 1,2 \sin\left(1000\pi t - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Știm că: } A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \Delta \varphi.$$

$$\text{Din datele problemei, rezultă: } A^2 = 4a^2; A = 2a = 2,4 \text{ cm.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}; a_1 = a_2; \varphi_1 = \varphi_2,$$

$$\text{de unde rezultă: } \operatorname{tg} \varphi = 1 \text{ și } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Probleme propuse

1. Punctele unui mediu în care s-au format unde execută mișcări periodice descrise de ecuația $y = 2 \cdot 10^{-3} \sin(120\pi t - 0,25x) \text{ m}$.

Să se calculeze viteza cu care se propagă unda și viteza maximă a oscilațiilor punctelor mediului.

$$\mathbf{R: 1507,2 \text{ m/s}; 0,75 \text{ m/s.}}$$

2. O sursă oscilează cu frecvența $\nu = 50 \text{ Hz}$. Lungimea de undă a undelor longitudinale care se propagă în mediul elastic este $\lambda = 10 \text{ m}$. După cât timp începe să oscileze un punct situat la distanța $x = 8 \text{ m}$ față de sursă și ce defazaj există între oscilația acestui punct și sursă?

$$\mathbf{R: 16 \mu\text{s}; } 8\pi/5.$$

3. Într-un mediu elastic cu $E = 7,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ se propagă o undă longitudinală a cărei ecuație, la distanța $x = 5 \text{ m}$ de sursa de oscilație, este $y = 2 \sin 2\pi(500t - 0,5) \text{ cm}$. Să se calculeze densitatea mediului.

$$\mathbf{R: } 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

4.

Capetele unei bare de aluminiu AB oscilează. Oscilațiile se propagă prin bară, sub formă de unde longitudinale. Într-un punct al barei sosesc undele plane date de ecuațiile:

$$y_1 = 10^{-2} \sin\left(2520\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ m și } y_2 = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(2520\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ m.}$$

Să se determine lungimea barei, cunoscând densitatea ei, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, și modulul de elasticitate al mediului $E = 6,85832 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

R: 1 m.

5.

Într-o bară metalică de densitate $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ se propagă unda plană longitudinală $y = 10^{-3} \sin 2\pi(1000\pi t - 0,2x) \text{ m}$. Să se calculeze modulul de elasticitate al mediului, E .

R: $19,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

6.

Care este elongația unui punct, aflat la distanța $x = \frac{\lambda}{12}$ de sursă, la momentul $t = \frac{T}{6}$? Amplitudinea oscilației este $A = 0,05 \text{ m}$.

R: 2,5 cm.

7.

Elongația unui punct material, care se găsește la distanța $x = 4 \text{ cm}$ de sursă, la momentul $t = \frac{T}{6}$, este egală cu jumătate din amplitudine. Să se calculeze lungimea de undă a unei longitudinale.

R: 48 cm.

8.

În cazul în care unda se reflectă pe un mediu mai dens, să se determine coordonatele ventrelor și ale nodurilor care se formează în unda staționară, dacă lungimea de undă este $\lambda = 12 \text{ cm}$.

R: $x_V = 3, 9, 15, \dots \text{ cm}$; $x_N = 0, 6, 12, \dots \text{ cm}$.

9.

Mișcând capătul unei corzi orizontale lungi, în sus și în jos, pe o distanță de 10 cm, se generează o undă transversală. Mișcarea se repetă de două ori pe secundă. Știind că densitatea liniară a corzii este 20 g/m și că aceasta este întinsă cu o forță de 10 N, să se determine viteza, amplitudinea, frecvența și lungimea de undă a mișcării ondulatorii.

R: $c = 22,3 \text{ m/s}$; $A = 5 \text{ cm}$; $\nu = 2 \text{ Hz}$; $\lambda = 11,15 \text{ m}$.

10.

Într-o sfoară se propagă o undă transversală de forma:

$$y = 10 \sin \pi(2t - 0,01x) \text{ cm.}$$

Să se determine amplitudinea, frecvența, lungimea de undă și viteza de propagare a undei.

R: $A = 10 \text{ cm}$; $\nu = 1 \text{ Hz}$; $\lambda = 200 \text{ cm}$; $c = 200 \text{ cm/s}$.

1.3.5. Elemente de acustică

Definiție

Vibrațiile mecanice, care se propagă sub formă de unde și provoacă senzații percepute de ureche, se numesc *unde sonore* sau *sunete*.

Urechea umană percepe vibrațiile care au frecvența cuprinsă între 16 și 20 000 Hz. Vibrațiile care au frecvențe sub 16 Hz se numesc *infrasunete*. Ele nu sunt percepute de urechea umană, dar sunt percepute de unele animale (șoareci, pisici). Infrasunetele sunt generate de surse mari: stații de amplificare, cutremure.

Vibrațiile cu frecvențe peste 20 000 Hz se numesc *ultrasunete*; nici acestea nu sunt percepute de urechea umană, dar sunt percepute de unele animale (lilieci). Vibrațiile cu frecvențe mai mari de 10^9 Hz se numesc *hipersunete*.

După senzațiile produse asupra urechii, sunetele se clasifică în:

1. *Detonații*:

– sunete cu durată foarte scurtă și de intensitate mare.

2. *Zgomote*:

– în general, vibrații mecanice aperiodice.

Se pot distinge: zgomote muzicale (gongul, clopotele), zgomote permanente (zgomotul străzii, zgomotul ploii – zgomotul produs de căderea picăturilor pe un acoperiș –, zgomotul de fond al unui disc, zgomotul de fond al unui tub cu neon). Nocivitatea zgomotelor depinde de intensitatea și de componența spectrală a sunetului (variația amplitudinii cu frecvența).

Există zgomote de frecvență joasă (< 300 Hz), frecvență medie (300–800 Hz), de înaltă frecvență (> 800 Hz); acestea din urmă sunt cele mai nocive.

3. *Sunete muzicale*: vibrații periodice nesinusoidale.

Undele sonore au toate proprietățile undelor mecanice: interferență, reflexie, refracție, difracție.

Reflexia

Urechea umană poate deosebi două sunete distincte, dacă ele se succed într-un interval de o zecime de secundă. Pentru $t < 0,1$ s, urechea sesizează un singur sunet.

Pentru a putea distinge sunetul reflectat de un obstacol de sunetul emis, distanța dintre observator și obstacol trebuie să fie de cel puțin 17 m, viteza de propagare a sunetului în aer fiind de 340 m/s:

$$2d = ct = 340 \cdot 0,1 = 34 \text{ m} \Rightarrow d = 17 \text{ m}.$$

Dacă $d < 17$ m, observatorul aude un sunet prelungit, fenomen cunoscut sub numele de *reverberație*. Acest fenomen constituie obiect de studiu în problemele de acustică arhitecturală.

Pentru $d > 17$ m, fenomenul se numește *ecou*.

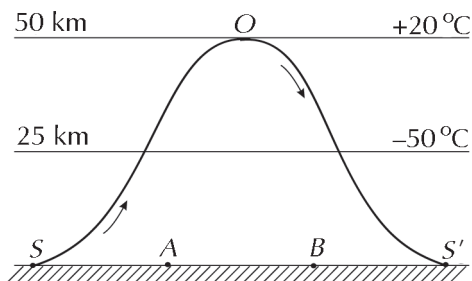


Fig. 1.30 Refracția undelor sonore.

să fie $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$. După această înălțime, temperatura începe să crească, atingând $+20\text{ }^{\circ}\text{C}$ la înălțimea de 50 km. Datorită acestui fapt, un sunet emis dintr-un punct S (fig. 1.30) se refractă apropiindu-se de normală, apoi, după înălțimea de 25 km, se refractă îndepărtându-se de normală, iar în punctul O , suferă o reflexie totală.

Fenomenul de **reflexie totală** are loc la trecerea unei unde dintr-un mediu mai dens într-un mediu mai puțin dens, atunci când unghiul de refracție crește.

Dacă unghiul de refracție $r = \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ și legea refracției devine, în acest caz, $\sin i = \frac{n_2}{n_1}$. Unghiul i se numește **unghi limită**.

La un unghi de incidență egal sau mai mare decât unghiul limită, unda nu se mai refractă, ea se reflectă, întorcându-se în același mediu.

Așa cum se vede în figura 1.30, unda sonoră se întoarce în S' .

Într-o regiune de pe suprafața Pământului, cuprinsă între S și S' , sunetul nu se aude deloc – „zona de tăcere” –, el putând fi recepționat într-o zonă mai îndepărtată.

Fenomenele de reflexie și refracție au aplicație în izolarile fonice. Interpunerea unor structuri diferite în calea propagării undelor sonore determină ca numai o mică parte din energia sonoră să fie transmisă.

(*) Difracția

Definiție

Fenomenul de ocolire aparentă a obstacolelor ale căror dimensiuni sunt de ordinul de mărime al lungimii de undă se numește **difracție**.

Undele acustice au lungimea de undă de ordinul de mărime al metrului, deci deschideri ca uși sau ferestre sunt astfel de obstacole.

Dacă o undă plană ajunge la o deschidere de diametru $d \approx \lambda$, **forma undelor difractate depinde de forma deschiderii**.

Pentru deschideri circulare, undele difractate sunt sferice (fig. 1.31).

Pentru o deschidere dreptunghiulară, undele difractate sunt cilindrice. De exemplu, o șosea dreaptă și lungă este o sursă de unde acustice cilindrice (fig. 1.32).

Datorită fenomenului de difracție, undele TV pot fi recepționate și în regiuni care nu se află pe linia emițătorului. Calitatea recepționării scade pe măsura scăderii lungimii de undă. Deci, în cazul undelor medii, recepția este mai bună. În stațiile de emisie, lungimile de undă sunt astfel selectate încât să apară fenomenul de difracție.

Orice vibrație periodică nesinusoidală poate fi descompusă într-o sumă de vibrații sinusoidale de frecvențe: v , $2v$, $3v$, ... ș.a.m.d. Frecvența cea mai joasă, v , este **frecvența sunetului fundamental**. Sunetele ce au frecvența un multiplu întreg al frecvenței sunetului fundamental se numesc **armonice**. De exemplu, sunetul viorii este foarte bogat în armonice, iar sunetul flautului – foarte sărac.

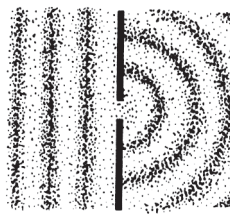


Fig. 1.31 Pentru deschideri circulare, undele difractate sunt unde sferice.

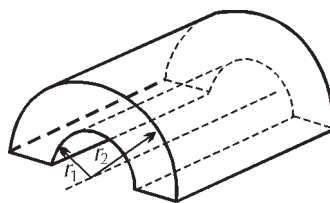


Fig. 1.32 Unde cilindrice.

Calitățile sunetului

Sunetele se deosebesc între ele prin **înălțime**, **timbru** și **intensitate** (sau tărie), caracteristici numite **calitățile sunetului**.

Înălțimea sunetului este determinată de frecvență. Sunetele de frecvențe mai mari sunt mai „ascuțite” sau mai „înalte”, iar sunetele de frecvențe joase sunt mai „grave”.

Timbrul deosebește între ele sunetele de aceeași înălțime și de aceeași intensitate. El depinde de numărul, intensitatea și frecvența armonicilor ce însoțesc sunetul fundamental. Cu cât armonicile sunt mai numeroase, sunetele sunt mai plăcute, mai armonioase.

Definiție

Intensitatea este energia transportată prin unitatea de suprafață perpendiculară pe direcția de propagare a undei, în unitatea de timp, și se măsoară în W/m^2 .

Pentru o anumită valoare a intensității, urechea umană nu mai percepe sunetul. Această valoare se numește **nivel de intensitate auditivă** sau **sonoră**.

Dependența dintre intensitatea senzației auditive și intensitatea sonoră a excitației este destul de complexă, depinzând de sensibilitatea urechii care, la rândul ei, este dependentă de frecvență.

1

Legea lui Weber-Fechner

Intensitatea senzației auditive este direct proporțională cu logaritmul zecimal al raportului dintre intensitatea excitației, I , și intensitatea corespunzătoare pragului auditiv inferior, I_0 :

$$S = k \lg \frac{I}{I_0}.$$

Pe baza acestei relații se stabilește și unitatea de măsură a nivelului de intensitate sonoră, N :

$$N = \lg \frac{I}{I_0} \text{ se exprimă în beli (B); } N = \ln \frac{I}{I_0} \text{ se exprimă în neperi (Np).}$$

Pentru a elimina dependența de frecvență a nivelului de intensitate sonoră, se reduce totul la un ton cu frecvența de 1000 Hz, se trece la logaritmul zecimal și se consideră k egal cu 1:

$$N = \lg \frac{I}{I_0}.$$

Pentru I_0 (la 1000 Hz) se ia 10^{-12} W/m^2 . Pentru $I_{\max}$ se ia 10^2 W/m^2 .

Acest interval, egal cu 10^{14} , se împarte în 14 părți egale, fiecare corespunzând unui raport de intensități egal cu 10. Această unitate s-a numit bel; unitatea de 10 ori mai mică este decibelul (dB) sau phonul.

Dăm câteva exemple de intensitate sonoră:

- vorbă în șoaptă: 20 dB;
- conversație normală 50–60 dB;
- muzică amplificată 120 dB;
- zgomotul unui avion cu reacție 130–140 dB.

Care sunt limitele de tolerabilitate?

Sunetele cu intensități mai mici de 25–35 dB sunt neglijabile. Cele cuprinse între 35–65 dB sunt suportabile. Intensitățile cuprinse în intervalul 65–95 dB sunt supărătoare. Intensitățile care depășesc 95 dB devin nocive (zgomote din filaturi, ateliere de tinichigerie sau ale ciocanelor pneumatice).

Conform normelor actuale, nivelul zgomotului în zonele locuite nu trebuie să depășească 50 dB în timpul zilei și 35 dB, în timpul nopții.

Posibilitatea de a diminua efectele nocive ale zgomotelor este înlăturarea sau ecranarea lor cu ajutorul perdelelor de păduri plantate.

S-a constatat că, la toate tipurile de păduri, atenuarea cea mai puternică este până la distanța de 20–30 m. Sunetele cel mai puternic atenuate sunt cele cu frecvența de 250 Hz, deoarece acestea sunt absorbite și de frunze și de crengi. Același fenomen se observă și iarna, atunci când lipsește frunzișul. Sunetele cu frecvența de 1000 Hz sunt cel mai puțin atenuate. Între frecvențele

de 2000–4000 Hz se observă din nou o creștere a atenuării. Aceasta s-ar datora multiplexelor reflexii și difracției ale sunetului pe frunze, ale căror dimensiuni sunt comparabile cu lungimea de undă corespunzătoare acestor frecvențe – 17, respectiv 8,5 cm. În funcție de natura pădurilor, s-a observat o netă influență asupra creșterii atenuării prin prezența tufișului intermediar, atât în păduri, cât și la marginea acestora.

Surse sonore

- coarde vibrante (instrumente de ciupit, vioara, pianul);
- tuburi sonore (instrumente de suflat, orgă);
- membrane vibrante (diapazon, xilofon).

Pentru toate sursele sonore există două probleme: mărimea instrumentelor sonore și acordul cu mediul înconjurător, care se realizează cu un corp de rezonanță corespunzător dimensionat.

1. Coarda sonoră

Este un fir elastic de lungime l , întins între două puncte fixe. Coardele sunt confecționate din metal sau din șuvițe de intestine de oaie uscate și bine răsucite. Se pun în vibrație prin ciupire, percuție sau frecare cu un arcuș. Unda generată, transversală sau longitudinală, se propagă în lungul coardei, se reflectă și, astfel, iau naștere unde staționare. În punctele fixe sunt noduri. Frecvența sunetului fundamental este:

$$v = \frac{c}{2l}.$$

Dacă r este raza secțiunii coardei și ρ densitatea ei, atunci:

$$v = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\pi r^2 \rho}} \quad (1.27)$$

Sunetele muzicale sunt determinate de numărul variat al armonicilor produse.

Lira, pianul, vioara, mandolina, cobza sunt numai câteva dintre instrumentele care produc sunete folosind vibrația coardelor.

2. Tuburi sonore

Tuburile sonore constituie partea principală a instrumentelor de suflat: naiul, cornul, flautul, trompeta, orga ș.a. Ele diferă prin mijlocul de excitare al aerului din tub, prin forma lor și prin felul în care variază lungimea lor. În aerul care vibrează în interiorul tuburilor se formează unde staționare. Aerul este pus în vibrație de o lamă vibrantă.

a) Tuburi sonore închise.

Acestea sunt închise la un capăt și deschise la celălalt. În figura 1.33 este ilustrată formarea sunetului fundamental și a primelor două armonice în tuburile sonore închise.

1

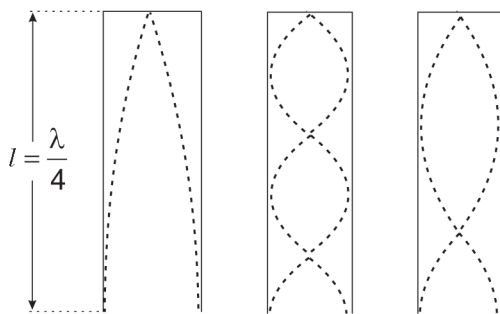


Fig. 1.33 Tuburi sonore închise.

Din figură se vede că:

$$\lambda = 4l$$

și, deci, frecvența sunetului fundamental este:

$$v = \frac{c}{4l}.$$

La rezonanță, în tuburile sonore închise, sunetele se întăresc la frecvențe egale cu un număr

impar de $\frac{\lambda}{4}$:

$$v_n = (2n-1) \frac{c}{4l}, \text{ unde } n = 1, 2, \dots \quad (1.29)$$

b) *Tuburi sonore deschise*

Așa cum se vede din figura 1.34, la ambele capete ale tubului se formează ventre.

Frecvența sunetului fundamental este:

$$v = \frac{c}{2l}.$$

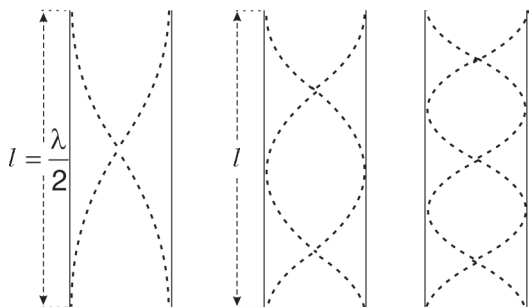
Frecvența sunetelor întărite este un număr întreg de $\frac{\lambda}{2}$:

Fig. 1.34 Tuburi sonore deschise.

$$v_n = n \frac{c}{2l}. \quad (1.29)$$

Se observă că în expresia frecvenței nu intră nici o mărime care să depindă de materialul din care este confecționat tubul. Lungimea tubului poate fi variată prin culisare (trombon) sau prin acoperirea și deschiderea, cu degetele sau cu niște clape, a unor orificii practicate în peretele tubului (fluier, clarinet ș.a.).

Metode experimentale de măsurare a vitezei de propagare a sunetului în diferite medii

1. *Tubul Kundt* (determinarea vitezei de propagare a sunetului în diferite medii solide)

Tubul Kundt este un tub de sticlă, având lungimea de 1–1,5 m, închis la capete cu niște dopuri *a* (fig. 1.35). Prin dopul de la capătul *A*, pătrunde o vergea care deplasează un piston *P*. Prin capătul *B*, se introduce o bară metalică *M*, fixată la mijlocul ei și terminată cu un disc *D*. Discul și pistonul nu ating

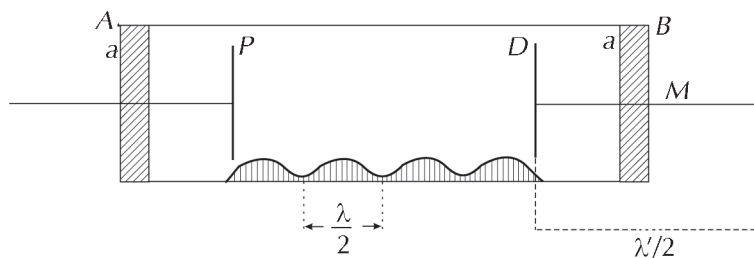


Fig. 1.35 Tubul Kundt.

pereții tubului. În tub se presară o pulbere ușoară, praf de plută sau talc. Se freacă bara cu o cârpă presărată cu sacâz până când scoate sunete. Acestea pun în vibrație aerul din tub, care se comprimă și se dilată în noduri, respectiv ventre.

Undele sonore, reflectându-se de obstacolul P , formează unde staționare evidențiate de aranjarea prafului din tub. El este împrăștiat în ventre și îngrădărit în noduri. Efectele sunt maxime când vibrațiile coloanei de aer sunt în rezonanță cu vibrațiile barei. Pentru a ajunge la rezonanță, se variază lungimea tubului prin deplasarea pistonului P .

Măsurăm cu rigla distanța dintre două ventre sau două noduri succesive, d , și determinăm lungimea de undă λ a sunetului care se propagă în tub:

$$\lambda = 2d.$$

Bara, fiind prinsă la mijloc, formează la capetele ei ventre; lungimea ei, l , este:

$$l = \frac{\lambda'}{2},$$

λ' fiind lungimea de undă a sunetului care se propagă în bara metalică.

La rezonanță, frecvența de oscilație a aerului din tub, ν , este egală cu frecvența de oscilație a barei, ν' :

$$\nu = \nu' \text{ sau } \frac{c}{\lambda} = \frac{c'}{\lambda'}.$$

Cunoscând viteza de propagare a sunetului în aer (340 m/s), λ și λ' rezultând din măsurătorile efectuate, se calculează viteza de propagare a sunetului, c' , în bară (aceasta putând fi confecționată din diferite materiale, diferite esențe de lemn sau diferite metale).

2. Metoda rezonanței (determinarea vitezei de propagare a sunetului în aer)

Se folosește un tub de sticlă parțial umplut cu apă, ca în figura 1.36. Prin schimbarea nivelului apei (ridicând sau coborând rezervorul din stânga) se variază lungimea coloanei de aer.

În timpul urcării sau al coborării apei în tub, deasupra lui se ține un diapazon pus în vibrație. Coloana de aer funcționează ca un tub închis la un

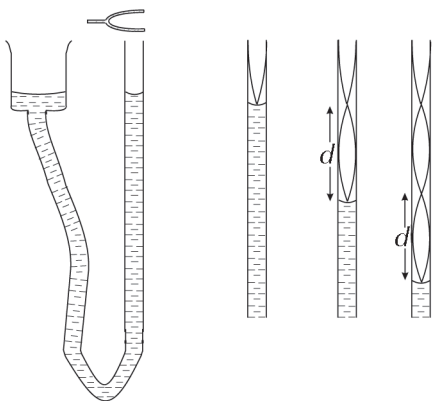


Fig. 1.36

Măsurarea vitezei sunetului în aer. Nivelul apei din tub poate fi modificat ridicând sau coborând rezervorul din stânga, care este legat de tub printr-un furtun de cauciuc.

Tabelul 2

Mediul de propagare	Viteza (m/s)
aer	340
bare metalice	> 1000
bare de oțel	4800–5000
apă	1480
pereti de clădiri	3500–4000
sticlă	5100–5500

capăt. Întrucât frecvența sursei este fixă și viteza de propagare a sunetului în aer este constantă la temperatură constantă, rezonanța se produce la o anumită lungime de undă:

$$\lambda = \frac{c}{v}.$$

La rezonanță, intensitatea este maximă, transferul de energie fiind maxim. În timpul curgerii lichidului prin tub, se notează pe tub punctele în care se percepe întărirea sunetului (sau atenuarea acestuia, dacă este mai sesizabilă). Distanța dintre două maxime sau două minime succesive este:

$$d = \frac{\lambda}{2}; l = 2d.$$

Deci:

$$2d = \frac{c}{v},$$

relație din care, cunoscând frecvența diapazonului și măsurând d , se poate calcula viteza de propagare a sunetului în aer:

$$c = 2dv.$$

În cazul undelor mecanice, densitățile mari ale mediilor în care se propagă duc la valori mari ale vitezei de fază, așa cum se vede în Tabelul 2. Viteza de propagare depinde și de temperatură.

1.3.6. Ultrasunete. Aplicații

Ultrasunetele sunt vibrații ale mediului material cu frecvențe mai mari de 20 000 Hz. S-au atins frecvențe de 3 GHz.

Producerea undelor ultrasonore

1. Efectul magnetostrictiv. O bară din material feromagnetic se introduce într-o bobină prin care trece curent alternativ. Bara se lungește și se scurtează alternativ, vibrând cu frecvența curentului alternativ. Aceste vibrații mecanice se propagă sub formă de unde ultrasonore. Datorită faptului că, pe măsura creșterii temperaturii, efectul magnetostrictiv scade și frecvențele obținute nu sunt prea mari (175 kHz), nu este frecvent folosit.

2. Efectul piezoelectric. A fost descoperit în anul 1880 de frații Curie. Dacă pe direcția axelor unor corpuri cristaline se aplică solicitări mecanice,

tracțiuni sau comprimări, pe anumite suprafețe apar sarcini electrice. Acesta este *efectul piezoelectric*.

Cristalul de cuarț are forma unei prisme hexagonale (fig. 1.37). Axa OO' este axă optică și unește centrele celor două baze ale prisme. Prin centrul cristalului, C , trec trei axe electrice care unesc mijloacele muchiilor opuse ale cristalului și sunt perpendiculare pe axa optică.

Din cristal se taie o lamă subțire, astfel încât fețele mari ale lamei să fie perpendiculare pe axele electrice. Placa are o muchie paralelă cu axa electrică (Oy), alta paralelă cu axa optică Ox și axa Oz paralelă cu axa mecanică sau de tracțiune (fig. 1.38).

În efectul piezoelectric direct, se comprimă sau se alungește lama pe direcția axei Oz și pe fețele mari ale lamei apar sarcini electrice (fig. 1.39, a și b).

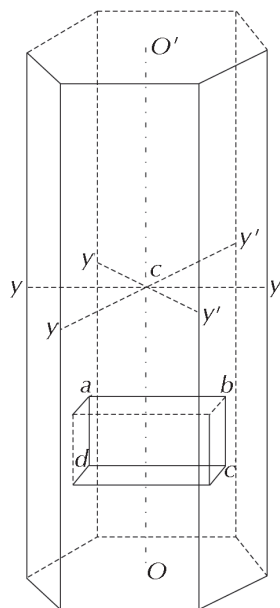


Fig. 1.37 Axele de simetrie ale cristalului de cuarț.

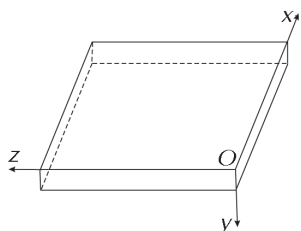


Fig. 1.38 Producerea efectului piezoelectric.

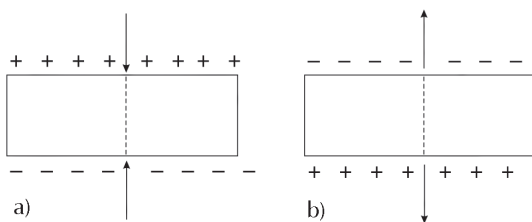


Fig. 1.39 a) Comprimarea; b) Alungirea.

În anul 1881 s-a constatat că, dacă pe fețele lamei se aplică o tensiune electrică, lama se contractă sau se dilată după semnul tensiunii aplicate. Acesta este *efectul piezoelectric invers* și este cel care se utilizează. Lama introdusă într-un mediu elastic, transmite vibrațiile ei sub formă de unde ultrasonore.

Se mai folosesc și alte substanțe piezoelectrice ca: titanat de bariu, unele ceramici sau unele substanțe organice (unele zaharuri, urotropina).

Aplicații ale ultrasunetelor

Frecvența ultrasunetelor fiind foarte mare și energia acestora este mare ($E \sim \nu^2$). Lungimea de undă fiind mică, ultrasunetele pot fi dirijate în fascicul. Din aceste proprietăți decurg și următoarele aplicații:

1. Efecte mecanice

a) *Fenomenul de cavitație*. La propagarea ultrasunetelor de frecvențe mari ($\nu \cong 1$ MHz) prin lichide, datorită variațiilor mari și dese de presiune, se

1

produc în masa de lichid ruperi microscopice, formându-se mici goluri (cavități) în care pătrund vaporii lichidului. Fenomenul de cavitație este însoțit de disocierea moleculelor. Acest fenomen are un important efect de distrugere. În glicerină, în nitrobenzen și în apă, acest fenomen este însoțit de un efect de luminiscentă, datorită câmpului electric intens ce se creează la suprafața de separație lichid-gaz din bulele de cavitație.

b) *Micromasajul*, cu efecte benefice asupra sănătății țesuturilor corpului uman.

2. Efecte fizico-chimice

La nivelul molecular, ultrasunetele pot provoca polimerizarea și depolimerizarea macromoleculelor, fenomene de ionizare, apariția de radicali liberi, dispersare coloidală. La nivel celular, pot provoca ruperea pereților celulari și chiar distrugerea celulelor (datorită fenomenului de cavitație).

3. Efecte termice

Aceste efecte se bazează pe energia mare a ultrasunetelor.

a) *Distrugerea microorganismelor*. Se utilizează la sterilizarea apei, a laptelui. Ultrasunetele distrug viețuitoare mici datorită încălzirii excesive a țesuturilor acestora (șoareci, peștișori, insecte), fiind folosite pentru distrugerea rozătoarelor.

b) *Ultrasunetele de intensitate mică* (~ 800 kHz) sunt folosite în fizioterapie, pentru accelerarea germinăției semințelor, stimularea sistemului nervos și a sistemului endocrin.

c) *Ultrasunetele de intensitate mare* se folosesc în stomatologie, la formarea unor mici orificii pentru plombele dentare, și în chirurgie, la pilirea și la sudarea oaselor. Osul se acoperă cu o substanță plastică lichidă care, sub acțiunea ultrasunetului, difuzează în os, formând un compus molecular cu colagenul din os și polimerizează solidificându-se, proces care are loc în câteva secunde; în acest caz se folosește un generator magnetostrictiv.

Proprietatea ultrasunetelor de a fi absorbite diferit, în funcție de natura țesuturilor, se folosește la *ultrasonografii ale valvei mitrale, ale ochiului*. Pe aceeași proprietate se bazează și *defectosopia* (prin care se constată existența eventualelor goluri sau fisuri existente în metale).

Deoarece sunt slab absorbite de apă, aceste sunete pot fi folosite și pentru trasarea profilului fundului unei mări sau a unui ocean, detectarea unor obstacole submarine (iceberguri, vase inamice) care periclitează navigația.

Toate aceste aplicații se bazează pe reflexia fasciculului ultrasonor.

Emițătorul (hidrolocator ultrasonor) instalat pe un vapor emite o undă ultrasonoră. Unda se reflectă pe fundul apei și semnalul reflectat este prins de un receptor. Se înregistrează timpul t scurs între emiterea și recepționarea semnalului. Cunoscând viteza de propagare a undei ultrasonore în apă, c , se poate determina adâncimea:

$$h = \frac{ct}{2}.$$

Ultrasunetele sunt folosite pe scară largă în cercetarea structurii interne a substanțelor, mai ales a lichidelor. Studiind variația vitezei de propagare a ultrasunetului și a coeficientului de absorbție în substanța cercetată, în funcție

de temperatură, presiune, concentrație și alți parametri, pe o largă plajă de frecvențe, se obțin informații precise asupra structurii interne, a interacțiunilor moleculare, a cineticii reacțiilor chimice.

Probleme propuse

1. Un fir de cupru este întins perfect între doi stâlpi de telegraf, situați la o distanță de 50 m unul de altul. Tensiunea ce ia naștere în fir este de 500 N, iar masa unității de lungime este $2 \cdot 10^{-2}$ kg/m. Care este frecvența fundamentală de vibrație?
R: $\approx 1,6$ Hz.
2. Două strune sunt întinse cu aceeași forță și vibrează cu frecvențe diferite datorită diferitelor densități liniare. Dacă cele două frecvențe sunt de 196 Hz și 294 Hz, care este raportul densităților liniare?
R: 2,25.
3. Ce adâncime a măsurat un hidrolocator ultrasonor, dacă timpul înregistrat de la emiterea și până la recepționarea semnalului ultrasonor a fost de 0,014 s? (viteza sunetului în apă este $c = 1432$ m/s).
R: ≈ 10 m.
4. Care este lățimea unui lac dacă sunetul a ajuns prin aer, de la un mal la celălalt, cu 10 s mai târziu decât prin apă? Viteza sunetului în aer este de 340 m/s și în apă, de 1450 m/s.
R: 4441,4 m.
5. Într-un tub Kundt, distanța măsurată între două ventre, consecutive, a undelor staționare formate, este de 6 cm. Lungimea barei fixate la mijloc este de 60 cm. Cunoscând viteza de propagare a sunetului în aer, 340 m/s, să se determine viteza de propagare a sunetului în bară.
R: 3400 m/s.
6. Ce lungime are un fluier care emite sunetul fundamental cu frecvența de 500 Hz?
R: 34 cm.
7. Care este frecvența sunetului fundamental dat de un tub sonor, închis, cu lungimea de 50 cm?
R: 170 Hz.

Test recapitulativ

1. Perioada de oscilație a unui pendul gravitațional, care oscilează într-un lift aflat în coborâre cu accelerația a , este:
a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$; c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$.

2. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?
 a) Perioada de oscilație a unui pendul gravitațional nu depinde de natura materialului din care este confecționat pendulul.
 b) Perioada de oscilație depinde de natura materialului din care este confecționat pendulul.
 c) Perioada de oscilație este direct proporțională cu rădăcina pătrată din valoarea lungimii pendulului.
3. Expresia $A\omega\cos\omega t$ exprimă:
 a) viteza mișcării oscilatorii; b) accelerația mișcării oscilatorii;
 c) viteza de propagare a unei longitudinale.
4. Care dintre următoarele formule reprezintă viteza de propagare a unei unde transversale?
 a) $\sqrt{\frac{F}{\mu}}$; b) $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$; c) $|A\omega|$.
5. Diferența de fază dintre elongația unei oscilații armonice și accelerația ei este: a) $\pi/2$; b) $\pi/4$; c) π .
6. Perioada de oscilație a unui oscilator armonic este:
 a) $2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$; b) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; c) $\sqrt{\frac{m}{k}}$.
7. Care dintre expresiile următoare nu reprezintă ecuația unei unde plane?
 a) $y(t, x) = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$; b) $y(t) = A\sin\omega t$; c) $y(t, x) = A\sin 2\pi v\left(t - \frac{x}{c}\right)$.
8. Un punct material execută oscilații armonice descrise de ecuația $x(t) = 0,02\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ m. Amplitudinea vitezei de oscilație este:
 a) $0,1\pi$ (m/s); b) $0,01\pi$ (m/s); c) $0,02\pi$ (m/s).
9. Să se scrie ecuația oscilației armonice a unui punct material, știind că într-un minut acesta execută 150 de oscilații, că faza inițială este $\pi/4$ și amplitudinea, 0,05 m.
 a) $x(t) = 0,5\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (m); b) $x(t) = 0,05\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (m);
 c) $x(t) = 0,05\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (m).
10. Mișcarea unui oscilator armonic este descrisă de ecuația $y(t) = 10^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}\right)$ (m). După cât timp elongația devine egală cu jumătate din amplitudine?
 a) 0,4 s; b) 0,33 s; c) 0,38 s.

11. Cunoscând că un oscilator armonic are masa m și constanta elastică k , iar la momentul $t = 0$ elongația este y_0 și energia totală E , să se exprime elongația, la momentul t , în funcție de aceste date:

a) $y(t) = \sqrt{2E} \sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t + \arcsin y_0 \sqrt{\frac{k}{2E}}\right);$

b) $y(t) = \sqrt{\frac{k}{2E}} \sin\left(\sqrt{\frac{m}{k}}t + \arcsin y_0\right);$

c) $y(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \arcsin y_0 \sqrt{\frac{k}{2E}}\right).$

12. Care este amplitudinea și faza inițială a mișcării rezultante a unui punct material, supus simultan la două oscilații, ale căror ecuații sunt:

$$x_1 = \sin \pi t \text{ și } x_2 = 2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)?$$

a) 5; $\arctg 2$; b) $\sqrt{5}$; $\arctg 2$; c) 2,5; $\arctg 3$.

13. Amplitudinea rezultantă a două mișcări oscilatorii de aceeași direcție și frecvență, care au amplitudinile $a_1 = 2$ cm și $a_2 = 4$ cm, este $A = 5$ cm. Diferența de fază, $\Delta\varphi$, dintre cele două mișcări oscilatorii care se compun este:

a) $\arccos \frac{5}{16}$; b) $\arcsin \frac{3}{16}$; c) $\arccos \frac{6}{16}$.

14. Să se scrie ecuația mișcării oscilatorii rezultate în urma compunerii a două oscilații armonice date de ecuațiile:

$$x_1(t) = 2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ și } x_2(t) = 3 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm).}$$

a) $x(t) = 4 \sin\left(\pi t + \arctg \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ (cm); b) $x(t) = 4,63 \sin\left(\pi t + \arctg \frac{4}{\sqrt{3}}\right);$

c) $x(t) = 4,5 \sin\left(\pi t + \arctg \frac{3}{\sqrt{3}}\right).$

15. O undă transversală se propagă în lungul unei bare elastice cu viteză $v = 15$ m/s. Care este diferența de fază dintre două puncte aflate la distanța $\Delta x = 4,5$ m, dacă perioada de vibrație a punctelor barei este $T = 1,2$ s?
- a) 0; b) $\pi/4$; c) $\pi/2$.

16. Într-un mediu elastic se propagă vibrații longitudinale cu frecvența $\nu = 500$ Hz. Modulul de elasticitate al mediului este $E = 4,32 \cdot 10^{10}$ N/m² și densitatea, $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ kg/m³. Care este diferența de fază dintre două puncte care se află la distanța $\Delta x = 4$ m?

a) π ; b) $\pi/2$; c) $\pi/4$.

Rezolvările problemelor

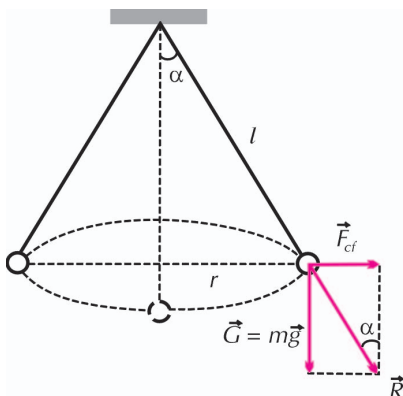
1.2. 1. $\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$; $k = m\omega^2$; $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ și $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$, deci

$$\frac{mA^2\omega^2\sin^2\omega t}{2} = \frac{mA^2\omega^2\cos^2\omega t}{2} \Rightarrow \sin\omega t = \cos\omega t \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{4}; t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{d}{g\sin\alpha}}.$$

2. $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$; $E_t = \frac{mA^2\omega^2}{2}$; $F_{\max} = m\omega^2 A \rightarrow A = \frac{2E_t}{F_{\max}}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$, deci:

$$x(t) = \frac{2E_t}{F_{\max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right). \quad 3. kA = m_2g; T_g = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ și } T_r = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow \frac{l}{g} = \frac{m_1}{k}$$

$$\Rightarrow l = \frac{m_1}{m_2}A = 0,4 \text{ m.}$$



4. Din figură se vede că: $F_{cf} = G\text{tg}\alpha$ și $r = l\sin\alpha$; $m\omega^2 = mg \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha}$;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha}.$$

5. Ecuația poate fi adusă la forma obișnuită: $x = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$, deci:

$$A = 10^{-1} \text{ m și } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

6. $\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow T_s = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$ și $k_p = k_1 + k_2 \rightarrow T_p = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$; $\frac{T_s}{T_p} = \frac{k_1+k_2}{\sqrt{k_1k_2}}$.

7. $\omega^2 = \frac{k}{m}$; $F = kA$; $k = \frac{F}{A} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F}{mA}} = 440 \text{ Hz}$; $E_t = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{FA}{2} = 19,36 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

8. $v_{\max} = |A\omega| = 10^{-1} \cdot 2\pi = 0,628 \text{ m/s}$; $a_{\max} = |A\omega^2| = 3,94 \text{ m/s}^2$.

9. Din problema rezolvată 2, rezultă: $\omega^2 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{y_2^2 - y_1^2}$ și $A^2 = y_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2}$.

10. Din energia totală a moleculei, fiecărui atom îi revine jumătate: $\frac{kA^2}{2} = E$,

unde $E = \frac{E_t}{2} = \frac{1,3 \cdot 10^{-19}}{2} = 6,5 \cdot 10^{-20} \text{ J}$; $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ și $v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

11. Forța care pune în oscilație dopul scufundat la adâncimea h este forța arhimedică egală cu greutatea apei dezlocuite ρVg ; $ma = \rho Vg$; amplitudinea

accelearației de oscilație este $h\omega^2$, deci: $m h \omega^2 = \rho \frac{\pi D^2}{4} h g$; $T = \frac{4}{D} \sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$.

12. Forța care pune în oscilație coloana de lichid este presiunea hidrostatică $\rho g \Delta h$ înmulțită cu secțiunea S a coloanei. Amplitudinea accelearației de oscilație

este $\frac{\Delta h}{2} \omega^2$ (Δh este denivelarea din cele două tuburi);

$$ma = \rho g \Delta h S \text{ sau } \rho V \frac{\Delta h}{2} \omega^2 = \rho g \Delta h S \rightarrow S l \frac{\omega^2}{2} = g S \rightarrow \omega^2 = \frac{2g}{l} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

13. Asupra pendulului acționează o forță rezultantă $R = G - F_A$, unde F_A este forța arhimedică. Forța care produce oscilațiile pendulului este $R \sin \alpha$; $ma =$

$$R \sin \alpha; m l \omega^2 \sin \alpha = (mg - \rho_l V_c g) \sin \alpha; \rho_c V_c l \omega^2 = \rho_c V_c (1 - n) g; n = \frac{\rho_l}{\rho_c} = 0,6;$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(1-n)}}.$$

$$\mathbf{14.} \quad ma = mg \sin \beta; a = l \omega^2 = \frac{h}{\sin \beta} \omega^2; \frac{h}{\sin \beta} \omega^2 = g \sin \beta; 4\pi^2 v^2 = \frac{g \sin^2 \beta}{h} \Rightarrow$$

$$v = \frac{\sin \beta}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} = 2,198 \text{ s.}$$

15*. Este o transformare izotermă a gazului din cilindru: $p_1 V_1 = p_2 V_2$ în care:

$$p_1 = \frac{vRT}{S(l-x)} \text{ și } p_2 = \frac{vRT}{S(l+x)}; F = (p_1 - p_2)S = vRT \left(\frac{1}{l-x} - \frac{1}{l+x} \right) = \frac{vRT 2x}{l^2 - x^2}.$$

Aplicăm legea a doua a dinamicii: $ma = F \rightarrow mx \frac{4\pi^2}{\tau^2} = \frac{vRT 2x}{l^2 - x^2}$; considerând

$$x^2 \text{ neglijabil, rezultă: } T = \frac{2\pi^2 m l^2}{vRT}.$$

$$\mathbf{1.3. 1.} \quad c = \lambda v; \frac{2\pi}{\lambda} = 0,25; \omega = 2\pi v; v = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow c = 480\pi = 1507,2 \text{ m/s};$$

$$v_{\max} = A\omega = 0,75 \text{ m/s.}$$

$$\mathbf{2.} \quad t = \frac{x}{c} = \frac{x}{\lambda v} = 16 \text{ } \mu\text{s}; \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = \frac{2\pi}{10} \cdot 8 = \frac{8\pi}{5}.$$

$$\mathbf{3.} \quad \omega = 1000\pi; v = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500 \text{ Hz}; \frac{x}{\lambda} = 0,5 \rightarrow \lambda = \frac{5}{0,5} = 10 \text{ m}; c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\rightarrow \rho = \frac{E}{c^2}; c = \lambda v = 5000 \text{ m/s}; \rho = 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

1

$$4. l = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{\lambda}{2\pi} (\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2) = \frac{\lambda}{4}; 2\pi v = 2520\pi; c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5040 \text{ m/s};$$

$$\lambda = \frac{c}{v} = 4 \text{ m} \rightarrow l = 1 \text{ m}.$$

$$5. E = c^2 \rho; c = \lambda v; \frac{1}{\lambda} = 0,2 \rightarrow \lambda = 5 \text{ m}; 2\pi \cdot 10^3 = 2\pi v \rightarrow v = 1000 \text{ Hz}; c = \lambda v = 5 \cdot 10^3 \text{ m/s, deci: } E = 19,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2.$$

$$6. y = 5 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{6} - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{12}\right) = 2,5 \text{ cm}.$$

$$7. \frac{A}{2} = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{6} - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 4 \cdot 10^{-2}\right); \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 4 \cdot 10^{-2}\right) = \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = \frac{\pi}{6} \rightarrow \lambda = 48 \text{ cm}.$$

$$9. v = 2 \text{ Hz}; A = 5 \text{ cm}; c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = 22,3 \text{ m/s}; \lambda = \frac{c}{v} = 11,5 \text{ m}.$$

$$10. A = 10 \text{ cm}; 2\pi v = 2\pi \rightarrow v = 1 \text{ Hz}; \frac{2\pi}{\lambda} = 0,01\pi \rightarrow \lambda = 200 \text{ cm}; c = \lambda v = 200 \text{ cm/s}.$$

$$1.3.6. 1. d = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \frac{c}{v} = 2d; c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \text{ deci: } v = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2d} = 1,58 \text{ Hz} \approx 1,6 \text{ Hz}.$$

$$2. \lambda v_1 = \sqrt{\frac{F}{\mu_1}}; \lambda v_2 = \sqrt{\frac{F}{\mu_2}}; \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = 2,25.$$

$$3. h = \frac{ct}{2} \approx 10 \text{ m}.$$

$$4. c_{\text{aer}} t_1 = c_{\text{apă}} t_2; \Delta t = t_2 - t_1; c_{\text{aer}} t_1 = c_{\text{apă}} (t_1 - \Delta t) \rightarrow t_1 = 13,06 \text{ s și } L = 4441,4 \text{ m}.$$

$$5. \frac{\lambda_1}{2} = l_1; \frac{\lambda_2}{2} = l_2 \rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{l_2}{l_1}; v_1 = v_2 \rightarrow \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2} \rightarrow c_2 = c_1 \frac{l_2}{l_1} = 3400 \text{ m/s}.$$

$$6. l = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2v} = 34 \text{ cm}. 7. l = \frac{\lambda}{4}; v = \frac{c}{4l} = 170 \text{ Hz}.$$

Capitolul

2

Oscilații și unde electromagnetice



2.1. Circuite de curent alternativ

2.2. Oscilații electromagnetice libere. Circuitul oscilant

2.3. Câmpul electromagnetic. Unde electromagnetice

Unele lecții pot fi asistate de calculator, folosind site-ul:
<http://science.howstuffworks.com/physical-science-channel.htm>

2.1. Circuite de curent alternativ

2.1.1. Comparație cu circuitul de curent continuu

Definiție

Se numesc *circuite de curent alternativ* circuitele electrice alimentate cu tensiuni electromotoare alternative.

2

Circuitele de curent alternativ prezintă o importanță deosebită în producerea, transmitia și utilizarea energiei electromagnetice, în electrocomunicații și automatizări.

Cele mai simple și mai robuste mașini electrice, generatoare sau motoare, sunt cele de curent alternativ. Transmitia optimă la distanță a energiei electromagnetice impune transformarea tensiunii, care se obține cu ajutorul transformatoarelor, deci în curent alternativ. Semnalele corespunzătoare vorbirii, muzicii etc., care fac obiectul transmisiilor în telecomunicații sunt, practic, suprapuneri de semnale electrice alternative. Aceste exemple arată importanța practică a studiului circuitelor în regim permanent sinusoidal (numit și regim permanent armonic); când alimentăm aceste circuite cu tensiuni alternative sinusoidale, intensitățile curenților din toate laturile circuitului reprezintă mărimi sinusoidale *de aceeași frecvență*.

Circuitele (rețelele) electrice pentru producerea, transmitia și distribuția energiei electrice sunt circuite de curent alternativ sinusoidal cu frecvența standard de 50 Hz (în America de Nord și în Australia, de 60 Hz), numită frecvență industrială. Această valoare a frecvenței este una de compromis, deoarece dificultățile producerii și transmisiei energiei sunt cu atât mai mari cu cât frecvența este mai înaltă; în același timp aceasta trebuie să fie suficient de mare pentru ca variațiile intensității luminoase a lămpilor cu incandescență folosite la iluminat să nu fie sesizabile vederii.

- Prin comparație cu circuitul în curent continuu, procesele care se desfășoară în circuitul de curent alternativ prezintă unele aspecte noi:

1. dacă într-un circuit de curent continuu *condensatorul* întrerupe circuitul, într-un circuit de curent alternativ condensatorul se încarcă și se descarcă, neîmpiedicând mișcarea oscilatorie de ansamblu a electronilor de conducție, deci nici stabilirea curentului alternativ în circuit;

2. prezența unei *bobine* într-un circuit de curent alternativ face să apară fenomenul de autoinducție, care contribuie la modificarea intensității curentului alternativ;

3. *rezistorul* are în curent alternativ același efect ca și în curent continuu: acesta absoarbe energie electrică pe care o transformă în căldură. Deci, rezistorul opune curentului alternativ aceeași rezistență ca și curentului continuu.

2.1.2. Osciloscopul electronic folosit în studiul circuitelor electrice

După cum știm, osciloscopul este aparatul care permite vizualizarea fenomenelor electrice periodice, transformând semnalele electrice în semnale optice. Acestea pot fi observate pe un ecran sau pot fi fotografiate sub forma unor imagini numite *oscilogramme*.

Elementul mobil al osciloscopului este un fascicul foarte subțire de electroni, practic lipsit de inerție, ceea ce permite studierea proceselor oscilatorii cu frecvențe de la câțiva hertzi până la sute de megahertzi (10^8 Hz).

Partea principală a osciloscopului o reprezintă tubul catodic (fig. 2.1), cu următoarele componente:

a) un tun electronic, alcătuit dintr-un termocadod (C) pentru emisia electronilor și un sistem de electrozi cilindrici (W, A_1 și A_2), puși la diferite potențiale, cu ajutorul cărora se accelerează electronii și se formează fasciculul electronic foarte subțire;

b) două perechi de plăci de deflexie, pe verticală (P_y) și pe orizontală (P_x), care deviază fasciculul corespunzător tensiunilor aplicate;

c) ecranul E, format dintr-un strat de substanță luminescentă (luminofor), depus pe peretele interior al ecranului de sticlă al tubului. Luminoforul (sulfură de zinc sau sulfură de cadmiu) are proprietatea de a emite lumina când este bombardat cu electroni. Fasciculul electronic formează pe ecran, în absența unei tensiuni pe plăcile de deflexie P_y și P_x , un punct luminos (numit *spot*) în centrul ecranului.

• Pentru vizualizarea formei curbei mărimilor de studiat, în funcție de timp, pe plăcile verticale P_y se aplică tensiunea de studiu u_y , adică variabila dependentă, iar pe plăcile de deviere orizontală P_x , o tensiune u_x , care are o variație liniară în timp, în formă de dinți de fierăstrău, și care constituie variabila independentă, denumită *bază de timp*.

Sub acțiunea câmpului electric produs de tensiunea u_x (fig. 2.2, a), în absența semnalului studiat u_y , în

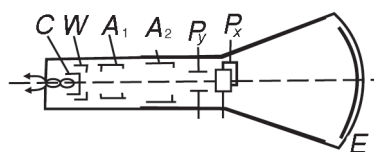
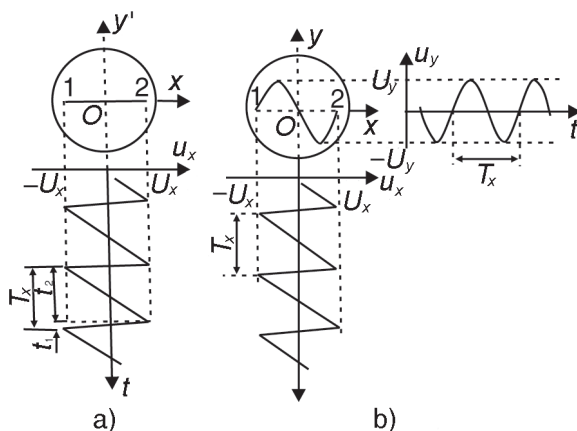


Fig. 2.1 Schema tubului catodic la osciloscopul electronic.



Formarea imaginilor pe ecranul osciloscopului: a – imagine în absența semnalului de analizat, $u_y = 0$; b – imagine pentru $v_y = v_x$.

Fig. 2.2

intervalul de timp t_1 , corespunzător porțiunii ascendente a curbei în formă de dinte de fierăstrău, fasciculul de electroni se deplasează pe ecran din punctul 1 în punctul 2 cu o viteză constantă. În intervalul de timp t_2 , foarte scurt, corespunzător porțiunii descendente a tensiunii bazei de timp u_x , fasciculul de electroni se întoarce din punctul 1 spre punctul 2.

- Dacă simultan cu tensiunea u_x se aplică și semnalul de cercetat u_y (fig. 2.2, b), fasciculul de electroni, sub acțiunea câmpurilor produse de cele două tensiuni, descrie curba luminoasă a variației în timp a tensiunii de cercetat, $u_y = f(t)$. Dacă frecvența tensiunii de cercetat, ν_y , este egală cu frecvența tensiunii u_x , adică ν_x , pe ecran apare curba corespunzătoare unei perioade de oscilație. Dacă $\nu_x = n\nu_y$, curba cuprinde n perioade pe ecran.

Pentru a putea studia simultan două semnale pe ecranul unui tub catodic cu un singur spot, se utilizează un dispozitiv special, numit comutator electronic, care permite aplicarea, pe rând, a tensiunilor de cercetat, pe plăcile de deviere verticală, P_y . Curbele luminoase ale celor două tensiuni apar în același timp pe ecran datorită persistenței luminoase (postluminescență) a ecranului. Un asemenea osciloscop se numește cu **spot multiplu** și se va folosi în cele ce urmează la experimentele legate de studiul circuitelor electrice aflate în diferite regimuri de funcționare.

Aplicație

Pe plăcile P_y ale unui osciloscop se aplică o tensiune alternativă u . Spotul luminos, oscilând numai pe verticală, va da pe ecran o linie luminoasă, având lungimea $l = 50$ mm. Cunoscând că devierea spotului luminos este de 1 mm pentru o tensiune aplicată plăcilor egală cu 1 V, adică sensibilitatea tubului catodic este $S = 1$ mm/V, să se calculeze valoarea tensiunii efective aplicate plăcilor P_y .

Soluție:

Lungimea liniei verticale fiind proporțională cu dublul amplitudinii tensiunii aplicate, cunoscând și sensibilitatea tubului catodic, rezultă că:

$$2U_m = l/S = 50 \text{ V sau } U_m = 25 \text{ V,}$$

de unde: $U = 0,707 \cdot U_m = 17,7 \text{ V.}$

2.1.3. Investigarea experimentală a comportamentului rezistorului, bobinei și condensatorului

În domeniul de proiectare electroenergetic, cât și în cel electronic, cunoașterea timpului de stabilire a unui regim permanent în circuite tip RC (rezistor în serie cu un condensator) sau de tip RL (rezistor în serie cu o bobină) este deosebit de importantă.

Spre deosebire de regimurile permanente, în care intensitățile curenților și tensiunile au valori constante (cazul circuitelor de curent continuu) sau sunt

variabile în timp, cu amplitudini constante (cazul circuitelor de curent alternativ), *regimul tranzitoriu* este un regim nestăionar, corespunzător trecerii circuitelor electrice de la un regim permanent la un alt regim permanent.

Regimurile tranzitorii apar și în cazurile conectării și deconectării circuitelor RL și RC de la sursele de tensiune continuă.

Studiul circuitelor RL și RC în regim de tip tranzitoriu constă în determinarea intensităților curenților, a tensiunilor tranzitorii din aceste circuite, cât și a timpului de stabilire a regimului permanent al acestora.

În cele ce urmează se va prezenta investigarea teoretic-experimentală a comportamentului rezistorului, bobinei și condensatorului în curent continuu și în curent alternativ.

2.1.4. Comportarea rezistorului, bobinei și condensatorului în curent continuu

2.1.4.1. Rezistorul și bobina în curent continuu

Rezistorul este unul dintre elementele de circuit obișnuite, alături de bobină și condensator. Conducția electrică în cazul acestuia are loc, în principal, printr-un metal. Rezistorul este un element liniar de circuit: între intensitatea curentului și tensiune există o relație liniară atât în curent continuu, ($U = RI$), cât și în curent alternativ, $u = Ri$, sau $U = RI$ în valori efective (fig. 2.3).

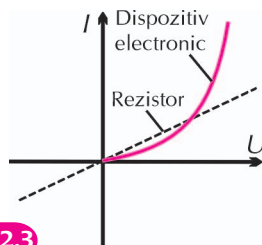


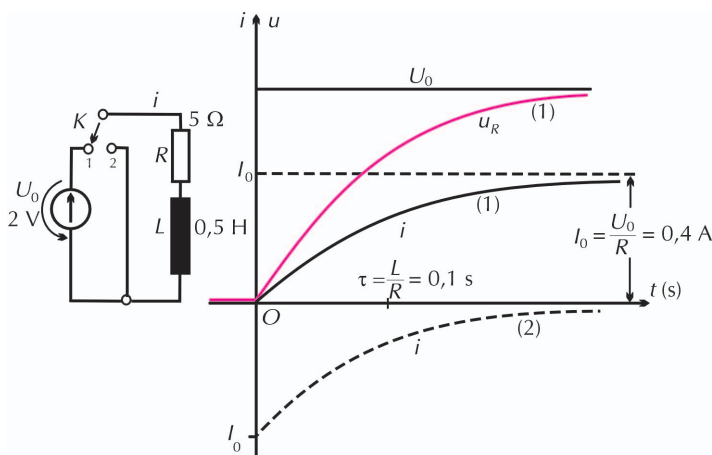
Fig. 2.3

Caracteristica curent-tensiune (I, U) care exprimă dependența intensității curentului funcție de tensiune pentru un dispozitiv electronic (element neliniar) și pentru un rezistor (element liniar).

Regimul tranzitoriu de stabilire a curentului continuu într-o bobină (circuit RL serie) (fig. 2.4)

Fig. 2.4

Variația în timp a intensității curentului $i(t)$ și a tensiunii $u_R(t)$ în regim tranzitoriu care urmează închiderii (1) sau scurtcircuitării circuitului LR (2).



Se consideră un circuit serie (fig. 2.4) conținând o sursă, o bobină de inductanță L , un rezistor de rezistență echivalentă R (rezistența sârmelor de legătură și rezistența sârmei din care este realizată bobina).

Legea a II-a Kirchhoff, identificându-se cu legea lui Ohm în cazul circuitului electric simplu (contactorul K_1 închis), este: $U_0 + e_a = Ri$. Cunoscând că tensiunea electromotoare de autoinducție este dată de expresia $e_a = -L \frac{di}{dt}$, se obține relația în variabila $i = f(t)$:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U_0,$$

care are soluția:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

sau, cu $I_0 = \frac{U_0}{R}$:

$$i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

relație care reprezintă *legea de stabilire a curentului continuu în circuitul RL*. S-a notat cu

$$\tau = \frac{L}{R}, [\tau] = s,$$

mărimea numită *constanta de timp* a circuitului serie RL , care se exprimă în secunde.

Semnificația acestei constante de timp rezultă din ecuația $i = f(t)$, luând $t = \tau$. Valoarea în acest moment ($t = \tau$) a intensității curentului este:

$$i = I_0 \left(1 - \frac{1}{e} \right) = I_0 (1 - 0,368) = 0,632 I_0,$$

unde $I_0 = \frac{U}{R}$ este valoarea maximă, finală, de regim permanent a intensității curentului continuu. Cu cât constanta de timp a circuitului este mai mare, cu atât curentul se stabilește mai încet, obținerea energiei maxime a câmpului magnetic al bobinei, $W_m = \frac{1}{2} L I_0^2$, necesitând un timp mai lung.

Stingerea curentului continuu în circuitul LR serie

Intensitatea curentului în acest caz este soluția ecuației $L \frac{di}{dt} = Ri$, adică:

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Intensitatea curentului nu scade brusc, curentul se menține un interval de timp în care toată energia câmpului magnetic W_m se disipă sub formă de căldură în părțile rezistive ale circuitului.

După timpul $t = \tau$ de la scurtcircuitarea bobinei, intensitatea curentului prin bobină scade la valoarea:

$$i = \frac{I_0}{e} = 0,368 I_0,$$

adică scade cu: $I_0 - \frac{I_0}{e} = 0,632I_0$.

• **Observație:** Teoretic, regimul tranzitoriu durează infinit de mult, deoarece $i = 0$ numai pentru $t \rightarrow \infty$. Practic, se poate considera că, după un timp de ordinul a $4...5\tau$, $i \approx 0$. Într-adevăr, pentru $t = 5\tau$: $i = \frac{I_0}{e^5} = (0,368)^5 I_0 = 0,0067I_0$ ($= 0,67\% I_0$). Regimul tranzitoriu durează un timp relativ scurt de la închiderea (deschiderea) întrerupătorului K ; acest interval de timp are ordinul de mărime egal cu ordinul de mărime al constantei de timp a circuitului. Pentru valorile $L = 0,5 \text{ H}$ și $R = 5 \Omega$, valorile uzuale pentru bobine de inductanță mare, se obține $\tau = 0,1 \text{ s}$ și regimul tranzitoriu durează practic o jumătate de secundă; instrumentele de măsură obișnuite nu-l pot pune în evidență.

Concluzii

1. Prezența unei bobine într-un circuit nu introduce o întrerupere a circuitului.
2. Timpul de stabilire ($i = I_0$) sau de stingere ($i = 0$) a curentului într-un circuit RL serie este determinat de constanta de timp $\tau = \frac{L}{R}$ a circuitului. Cu cât τ este mai mic, cu atât stabilirea sau stingerea curentului este mai rapidă.

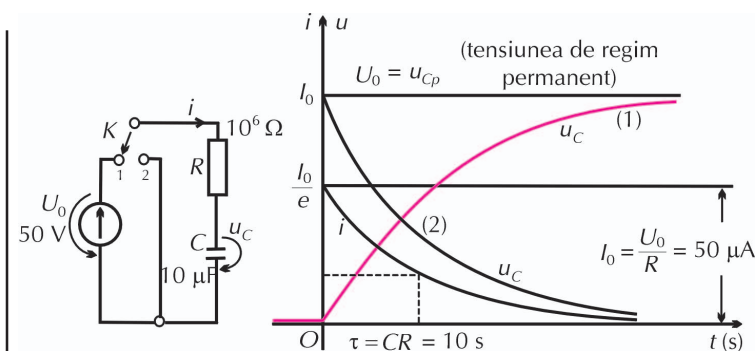
2.1.4.2. Condensatorul în curent continuu

Regimul tranzitoriu de încărcare a unui condensator (circuit RC serie)

Se consideră un circuit serie (fig. 2.5) conținând: un condensator de capacitate C , un rezistor, o sursă cu tensiunea la borne U_0 constantă și un întrerupător K , rezistența totală a circuitului (a rezistorului și a sârmelor de legătură) fiind R . Circuitul este la început deschis, condensatorul descărcat, iar în momentul $t = 0$ se închide cu ajutorul întrerupătorului pe poziția 1.

Fig. 2.5

Variațiile în timp ale mărimilor $u_C(t)$ și $i(t)$ în regim tranzitoriu care urmează încărcării (1) sau descărcării condensatorului (2).



Intensitatea curentului de încărcare a condensatorului, i , și tensiunea, u_C , la bornele condensatorului au expresiile:

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}; u_C = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Când K este pe poziția 2, condensatorul se descarcă, iar i și u_C au expresiile:

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}; u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Sensul curentului de descărcare este contrar sensului curentului de încărcare a condensatorului. Cățul $\frac{U_0}{R}$ definește intensitatea maximă, $I_0 = \frac{U_0}{R}$.

Toate mărimile exponențiale i și u_C conțin mărimea $\tau = RC$. Aceasta este **constanta de timp** a circuitului serie RC , cu aceeași semnificație ca în cazul circuitului RL :

$$\tau[s] = R[\Omega] \cdot C[F]; \quad [\tau] = \Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{C}{V} = \frac{As}{A} = s.$$

Se observă că în regim permanent ($t \rightarrow \infty$, $i = 0$) intensitatea curentului se anulează: ***o tensiune continuă nu poate determina un curent continuu, în regim permanent, printr-un condensator.***

Valorile inițiale $i(0) = I_0 = \frac{U_0}{R}$ ale intensităților curenților de încărcare pot fi foarte mari, periclitând securitatea instalațiilor. Pentru limitarea intensităților curentului de încărcare, marile baterii de condensatoare industriale au rezistoare sau alte dispozitive.

Dispozitiv experimental pentru studiul comportamentului în curent continuu al circuitelor serie RC și RL (fig. 2.6)

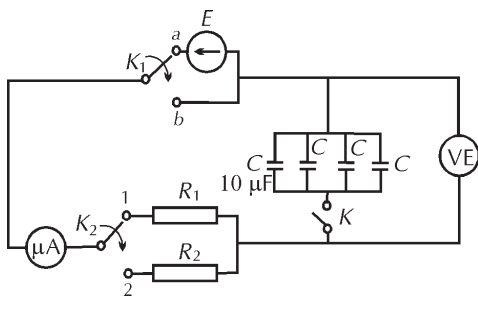


Fig. 2.6

Cu ajutorul unui cronometru și a indicațiilor instrumentelor de măsură, microampermetru (μA) și voltmetru electronic (VE), se realizează graficele pentru variațiile în timp ale mărimilor $i(t)$ și $u_C(t)$. Pentru procesul de încărcare, comutatorul K_2 se află pe contactul 1 sau 2, contactul K este închis, după care se închide contactorul K_1 pe poziția a. Odată condensatorul C încărcat ($i = 0$), se deschide

contactorul K , se trece comutatorul K_1 pe poziția b, se schimbă contactul pentru K_2 , se închide comutatorul K și se fac determinările pentru procesul de descărcare a condensatorului (conectarea microampermetrului fiind inversată).

- Se constată că, odată condensatorul încărcat ($u_C = U_0$), intensitatea curentului prin circuit se anulează ($i = 0$): ***într-un circuit de curent continuu condensatorul întrerupe circuitul.***

- Se determină grafic constanta de timp τ_C (timpul τ pentru care $i = \frac{I_0}{e}$) și se verifică egalitatea acesteia, în limita erorilor experimentale, cu rezultatul calculului teoretic $\tau_C = RC$ (pentru cele două valori de rezistență R_1 și R_2 , $U_0 = \text{constant}$).

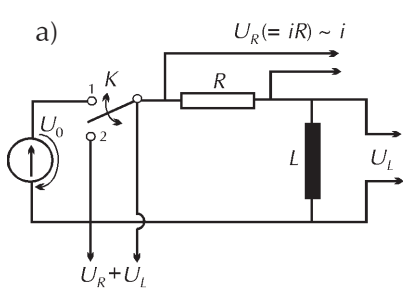
• Se observă că procesele încărcare-descărcare sunt mai rapide pentru R mai mare (de exemplu: $R_1 > R_2$), deci pentru τ mai mare ($\tau_1 > \tau_2$).

Date numerice: $C \sim$ zeci de microfarazi, $R = 10^6 \Omega$, $U_0 = 50 \text{ V}$ (tensiunea la bornele alimentatorului de tensiune continuă, reglabilă cu ajutorul unui buton potențiometric).

Circuitul serie RL

Datorită constantei de timp τ_L de valoare mică, în majoritatea cazurilor, comportarea tranzitorie a circuitului serie RL poate fi studiată experimental doar cu ajutorul osciloscopului catodic.

Dacă bornele Y ale osciloscopului sunt legate, pe rând, corespunzător schemei din figura 2.7, a , b , pot fi reprezentate, în funcție de timp, mărimile $i(t)$, $u_L(t)$ și $u_R + u_L = U_0$. Pentru semnalele oscilografiate comutatorul electronic K trebuie să comute periodic între contactele 1 și 2. Timpul (perioada) de comutare t trebuie să respecte condiția $t \gg \tau_L \left(= \frac{L}{R} \right)$.



a – Schema de legare a circuitului; b – Reprezentarea pe ecranul osciloscopului a tensiunilor de la bornele rezistorului, u_R , ale condensatorului, u_C , și de la bornele circuitului, $u_R + u_L$.

Fig. 2.7

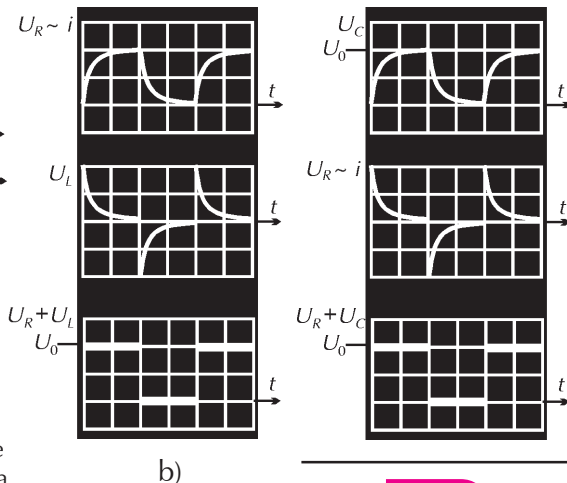


Fig. 2.8

Datele numerice pentru elementele circuitului analizat pot fi cele din figura 2.4.

Cu un montaj osciloscopic asemănător celui din figura 2.7 se obțin aceleași dependențe de timp și pentru mărimile $i(t)$, $u_C(t)$ și $u_R + u_C = U_0$ pentru circuitul RC serie (fig. 2.8).

Aplicații ale circuitelor serie RL și RC. Circuitele de diferențiere

În tehnica impulsurilor – radiolocație, televiziune, telecomunicații multi-canal –, a calculatoarelor, în automatizări etc., formarea impulsurilor se obține cu ajutorul *circuitelor de diferențiere*, care pot efectua diferite operații matematice.

Circuitele de diferențiere se pot concepe pe baza legilor de încărcare sau de descărcare a unui condensator și pe cele de stabilire sau de stingere a curentului printr-o bobină.

Definiție

Circuitul electric care dă la ieșire, în orice moment, o tensiune proporțională cu derivata tensiunii aplicate la intrare se numește circuit de diferențiere:

$$u_{ieș} = k \frac{du_{intr}}{dt}. \quad (2.1)$$

În figura 2.9 se dau schemele a două circuite de diferențiere și mai multe exemple de forme de tensiuni de intrare și tensiuni de ieșire corespunzătoare pentru circuite de diferențiere.

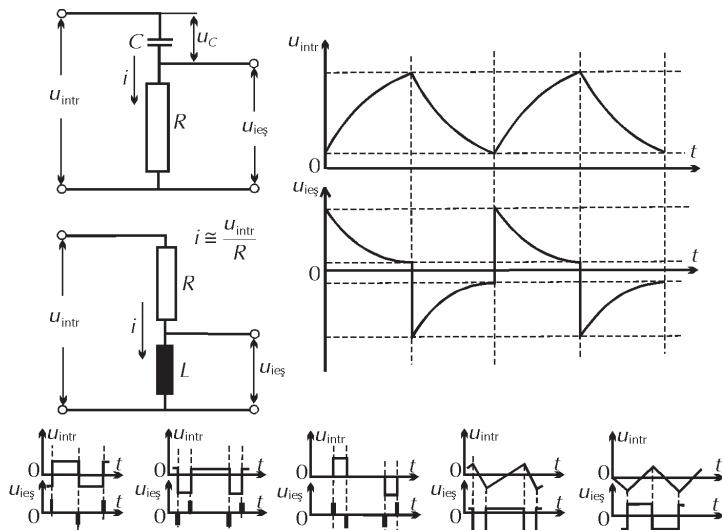


Fig. 2.9 Exemple de tensiuni aplicate la intrarea unui circuit de diferențiere, $u_{intr.}$ cu tensiunile corespunzătoare de la ieșire, $u_{ieș}$.

Aplicație

Să se explice constanța k , din relația 2.1, în cazul circuitului de diferențiere din figura 2.9.

Rezolvare: $u_{ieș} = Ri = RC \frac{du_C}{dt}$, de unde $k = \tau_C (= RC)$.

Studiul experimental și teoretic al legii lui Ohm în curentul alternativ se face pentru circuite în care generatorul de alimentare constituie o sursă de energie electromagnetică. Sursa, între ale cărei borne căderea de tensiune interioară este neglijabilă, introduce în circuitul din care face parte o t.e.m. alternativă e_g , dată, independentă de structura rețelei în care este conectată,

adică $e_g = u = U\sqrt{2} \sin \omega t$, unde U este tensiunea efectivă $\left(U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, U_m = \right.$ = tensiunea maximă). Reținem că instrumentele de măsură a intensităților și tensiunilor alternative indică valori efective.

2.1.5. Rezistorul, bobina și condensatorul în curent alternativ

2.1.5.1. Rezistor în curent alternativ

Circuitele care nu conțin bobine sau condensatoare opun curenților alternativi (de frecvență joasă), practic, aceeași rezistență ca și curentului continuu. Căderea de tensiune produsă la trecerea curentului alternativ printr-un rezistor este, conform legii lui Ohm, $u = i \cdot R$. Valorile instantanee u și i trec simultan prin valori maxime și nule (fig. 2.10), adică sunt în concordanță de fază. Scrisă pentru valori efective, legea lui Ohm pentru circuitul de rezistor este $I = \frac{U}{R}$. În curent alternativ, rezistenței rezistorului i se spune **rezistența activă**,

întrucât la trecerea curentului electric se disipă căldură.

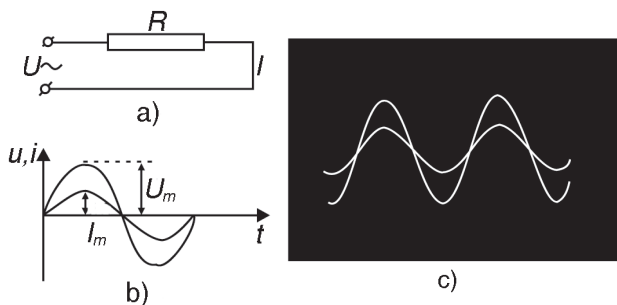


Fig. 2.10

a – Circuit cu rezistor ohmic; b – Variația cu timpul a tensiunii și a intensității curentului alternativ într-un circuit cu rezistor; c – Fotografie de pe ecranul osciloscopului.

2.1.5.2. Circuit serie cu rezistor și bobină în curent alternativ

Experimente

1. Un circuit serie format dintr-o bobină cu multe spire – în care se poate introduce un miez de fier –, un rezistor și un ampermetru de curent alternativ este alimentat sub tensiunea alternativă u cu valoarea efectivă U constantă (fig. 2.11).

Prin introducerea miezului de fier M în bobină, inductanța crește, iar ampermetrul indică scăderea intensității curentului alternativ prin circuitul

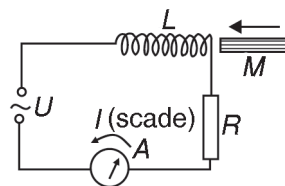


Fig. 2.11

Circuit serie RLC . Inductanța bobinei crește, intensitatea curentului scade.

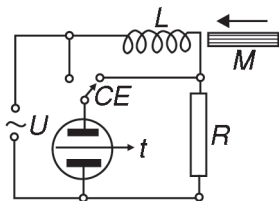


Fig. 2.12

Efectul inductanței bobinei în circuitul serie RL studiat cu ajutorul osciloscopului; CE – comutator electronic.

serie bobină-rezistor. Bobina introduce, deci, în circuit, o rezistență aparentă cu atât mai mare cu cât inductanța ei, L , este mai mare.

2. Cu un montaj a cărui schemă este prezentată în figura 2.12 se poate studia variația cu timpul a tensiunii u și a intensității i pentru un circuit serie RL . Cu ajutorul comutatorului electronic CE se aplică, pe rând, pe plăcile P_y ale osciloscopului tensiunea u și tensiunea $u_R = Ri$ de la bornele rezistorului, tensiune care corespunde variației intensității instantanee i .

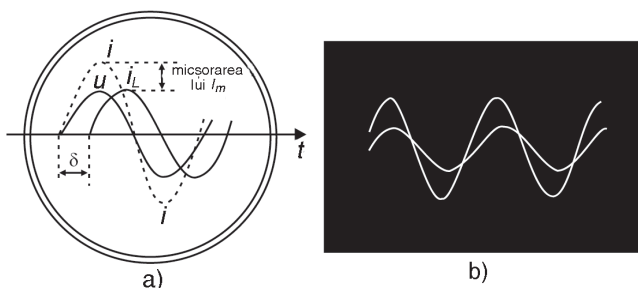


Fig. 2.13 a – Defazarea în urmă a intensității curentului față de tensiune în circuitul serie RL ; b – Fotografie de pe ecranul osciloscopului.

Figura 2.13 indică poziția curbelor corespunzătoare lui u și i pe ecranul osciloscopului. Atâta timp cât inductanța bobinei este neglijabilă sau foarte mică, adică bara de fier care constituie miezul bobinei, nu este introdusă în bobină, curbele pentru u și i intersectează

axa timpului în aceleași puncte; u și i sunt în fază (fig. 2.13, a). Odată cu creșterea inductanței bobinei, curba pentru i , notată acum cu i_L , care păstrează aceeași perioadă ca și u , se decalează înainte, pe axa timpului, cu δ față de curba sinusoidală pentru u .

Pe măsură ce inductanța bobinei crește, curba sinusoidală pentru i_L se aplatizează, adică I_m scade; decalajul lui i_L pe axa timpului, δ , față de curba pentru u – care rămâne fixă pe ecranul osciloscopului – crește. Decalajul indică faptul că i_L trece prin valoarea zero după ce tensiunea a luat această valoare, ceea ce arată că, în prezența bobinei, intensitatea curentului este defazată în urmă față de tensiune.

Definiție

O bobină aflată într-un circuit de curent alternativ introduce o rezistență aparentă și o defazare în urmă a intensității curentului față de tensiunea aplicată circuitului.

Aplicând legea a II-a a lui Kirchhoff în mărimi instantanee, aceeași cu legea lui Ohm pentru circuitul serie RL , se obține ecuația:

$$u + \left(-L \frac{di}{dt} \right) = Ri,$$

adică suma dintre tensiunea de alimentare u și tensiunea electromotoare de auto-inducție $-L \frac{di}{dt}$ trebuie să fie egală cu căderea de tensiune Ri pe rezistorul R .

Cunoscând că: $u = \sqrt{2}U \sin \omega t,$

atunci:

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$$

exprimă intensitatea curentului, defazată cu unghiul φ în urma tensiunii aplicate u , iar

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{2}\omega I \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

reprezintă viteza de variație a intensității curentului.

Trecând în membrul drept al egalității termenii conținând I , ecuația circuitului RL devine:

$$U \sin \omega t = RI \sin(\omega t - \varphi) + \omega LI \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Folosind reprezentarea fazorială*, relațiile între I , U , R , ω , L se pot determina imediat.

Concluzie

Fazorul conservă din mărimea sinusoidală elementele care îl individualizează în raport cu ceilalți fazori de aceeași frecvență: *valoarea efectivă* și *faza inițială*.

Fazorul $\overline{OA}$ (fig. 2.14), de modul RI , reprezintă termenul: $RI \sin(\omega t - \varphi)$.

Fazorul $\overline{AB}$, de modul ωLI , reprezintă termenul: $\omega LI \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, defazat înainte cu $\frac{\pi}{2}$ față de fazorul $\overline{OA}$.

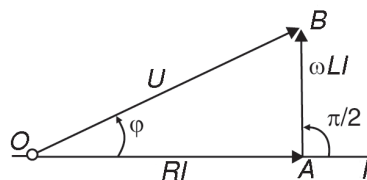


Fig. 2.14

Defazarea fazorială a circuitului RL serie.

Suma $\overline{OA} + \overline{AB}$ dă fazorul $\overline{OB}$, care reprezintă termenul $U \sin \omega t$, de modul U . În triunghiul dreptunghic OAB , unghiul $\varphi = \angle(\overline{OA}, \overline{OB})$ reprezintă unghiul de defazare în urmă a intensității curentului față de tensiune.

Pentru triunghiul dreptunghic OAB se pot scrie relațiile:

$$U = I \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Definiție

Se numește *impedanță* a unui circuit de curent alternativ, Z , raportul dintre valorile maxime sau efective ale tensiunii aplicate la borne și cele ale intensității curentului prin circuit:

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = Z > 0.$$

Pentru circuitul analizat, impedanța este $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.

Definiție

Mărimea $X_L = \omega L$ se numește *reactanță inductivă*.

* Precizare: În reprezentarea fazorială, fazorul asociat mărimii sinusoidale este un vector fix, de modul egal cu valoarea efectivă a mărimii sinusoidale și de argument egal cu faza inițială a mărimii.

Atât impedența, cât și reactanța inductivă se măsoară în ohmi (Ω), la fel ca rezistența R .

Lege

Relația $U = I\sqrt{R^2 + X_L^2}$ exprimă legea lui Ohm, în mărimi efective, pentru circuitul serie RL .

Dacă bobina ar avea rezistență neglijabilă (bobina ideală), atunci ea ar defaza intensitatea curentului, i , cu $\varphi = \pi/2$ rad în urma tensiunii u . Legea lui Ohm pentru circuitul cu bobină ideală ar fi $U = I \cdot X_L$, iar în mărimi instantanee:

$$u = L \frac{di}{dt},$$

aproximație des folosită în circuitele electronice ($X_L \gg R_{\text{bobină}}$).

Stabilirea regimului permanent sinusoidal în circuitul de curent alternativ serie, cu rezistor și elementele reactive bobină sau/și condensator, are loc după un timp scurt (fracțiuni de secundă), care corespunde unui regim numit **tranzitoriu** (v. subcapitolul 2.2).

Durata regimului tranzitoriu pentru circuitul serie LR este de același ordin de mărime cu mărimea τ ($= \frac{L}{R}$) numită **constanta de timp** a circuitului serie LR . Unitatea de măsură pentru τ este secunda:

$$[\tau] = \frac{\text{H (henry)}}{\Omega \text{ (ohm)}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{V}} = \text{s}.$$

Aplicații

1. Să se calculeze intensitatea curentului printr-o bobină cu inductanța $L = 0,5$ H și rezistența $R = 5 \Omega$, aflată, pe rând: a) sub tensiunea efectivă $U = 100$ V cu $\nu = 50$ Hz; b) sub tensiunea continuă $U = 100$ V. Se vor compara datele experimentale cu rezultatele calculului teoretic de mai jos.

Soluție:

a) Reactanța inductivă este $X_L = 2\pi\nu L = 157 \Omega$, iar:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{100}{\sqrt{25 + 24649}}, \text{ deci } I \approx \frac{100}{157,08} \approx 0,64 \text{ A (regim permanent sinusoidal).}$$

$$\text{b) } I = \frac{U}{R} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A (regim permanent de curent continuu).}$$

Pentru frecvențe mari, reactanța bobinelor poate căpăta valori mari, ceea ce duce la blocarea trecerii curentului; pentru frecvențe mici, bobina se comportă ca un scurtcircuit. Acestea sunt proprietăți folosite în proiectarea circuitelor electronice.

2. Pentru a se determina inductanța și rezistența unei bobine, se măsoară, cu aparate de mare precizie, valorile efective ale tensiunii la bornele bobinei, U , și ale intensității curentului care o străbate, I , pentru două frecvențe diferite, ν_1 și ν_2 , ale tensiunii sinusoidale aplicate, u , și anume:

$$U_1 = 60 \text{ V}; \quad I_1 = 10 \text{ A}; \quad \nu_1 = 50 \text{ Hz};$$

$$U_2 = 60 \text{ V}; \quad I_2 = 6 \text{ A}; \quad \nu_2 = 100 \text{ Hz}.$$

Să se calculeze inductanța L , rezistența bobinei, R , și constanta de timp, τ .

Soluție:

Impedanța bobinei, în cele două cazuri, este:

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \sqrt{R^2 + (2\pi\nu_1)^2 L^2}; \quad Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \sqrt{R^2 + (2\pi\nu_2)^2 L^2}.$$

$$\text{Se obține sistemul: } \begin{cases} R^2 + 10^4 \pi^2 L^2 = 36 \\ R^2 + 4 \cdot 10^4 \pi^2 L^2 = 100 \end{cases}.$$

$$\text{Rezultă: } L = 14,7 \cdot 10^{-2} \text{ H} = 147 \text{ mH}, \quad R = 3,83 \, \Omega; \quad \tau = \frac{L}{R} = 4,53 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$

2.1.5.3. Circuit serie cu rezistor și condensator în curent alternativ

Experimente

1. Se consideră un circuit serie format dintr-un sistem de trei condensatoare legate în paralel, un rezistor și un ampermetru (fig. 2.15). La bornele circuitului se aplică tensiunea alternativă u (cu valoarea efectivă U constantă). Deși condensatoarele constituie întreruperi pentru șirul de conductoare care formează circuitul, ampermetrul indică prezența unui curent alternativ prin circuitul în care s-a introdus unul dintre condensatoare. Deci **condensatorul nu se opune trecerii curentului alternativ**. Cu atât mai mult,

dacă se mărește capacitatea bateriei de condensatoare prin introducerea, pe rând, și a celorlalte două condensatoare (prin închiderea întrerupătoarelor), ampermetrul indică succesiv creșterea intensității curentului alternativ prin circuit. Modul în care un condensator este „traversat” de curentul alternativ devine ușor de înțeles dacă se consideră curentul alternativ drept o mișcare oscilatorie a electronilor liberi din circuitul conductor. Fiecare dintre armăturile condensatoarelor are, în decursul unei perioade, succesiv: o sarcină nulă, o sarcină pozitivă (lipsă de electroni), o sarcină nulă, o sarcină negativă (exces de electroni), o sarcină nulă.

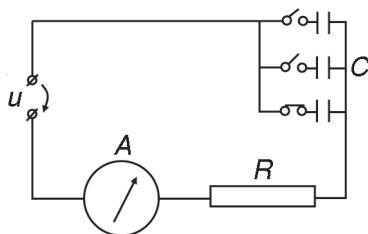


Fig. 2.15

Circuitul serie RC. Crește capacitatea bateriei de condensatoare, crește intensitatea curentului prin circuit.

2

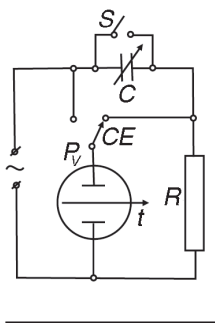


Fig. 2.16

Montaj pentru studiul circuitului RC serie cu ajutorul osciloscopului.

2. Cu un montaj a cărui schemă este prezentată în figura 2.16 se poate analiza variația tensiunii, u , și a intensității, i , în cazul circuitului serie RC. Prin intermediul comutatorului electronic CE se aplică, pe rând, pe plăcile P_y ale osciloscopului, tensiunea u și tensiunea $u_R = Ri$ de la bornele rezistorului de rezistență R , tensiune care corespunde variației intensității instantanee, i .

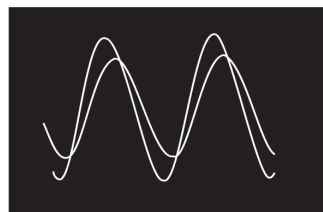
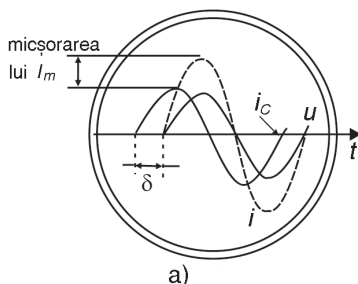


Fig. 2.17 a – Defazarea înainte a intensității curentului față de tensiune în circuitul RC serie; b – Fotografie de pe ecranul osciloscopului.

Figura 2.17 indică poziția curbelor corespunzătoare lui u și i pe ecranul osciloscopului. Curba pentru i și curba pentru u sunt în fază atâta timp cât întrerupătorul S scurtcircuită condensatorul variabil C . Introducând condensatorul în circuit prin deschiderea întrerupătorului S , curba sinusoidală i (notată cu i_c), care păstrează aceeași perioadă ca și u , se decalează în urmă cu δ , pe axa timpului, față de curba sinusoidală pentru u . Se observă, de asemenea, că valoarea maximă I_m pentru i_c este mai mică decât I_m pentru curba i ; I_m și δ scad pe măsură ce capacitatea condensatorului variabil C crește. Decalajul δ arată că intensitatea i trece prin valoarea zero înainte ca tensiunea să ia această valoare; în prezența condensatorului, intensitatea curentului este în avans de fază față de tensiune.

Concluzie

Într-un circuit de curent alternativ condensatorul introduce o rezistență aparentă și o defazare înainte a intensității curentului față de tensiunea aplicată circuitului.

Legea lui Ohm în mărimi instantanee, pentru circuitul serie RC, este dată de ecuația:

$$u = \frac{q}{C} + Ri, \quad (2.2)$$

unde u este tensiunea sursei, $\frac{q}{C}$ este tensiunea la bornele condensatorului și Ri , căderea de tensiune pe rezistor.

Să exprimăm relația de mai sus prin scrierea explicită a dependenței de timp a mărimilor u , i și q :

$$u = \sqrt{2}U \sin \omega t ;$$

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi) .$$

Unghiul φ , care exprimă diferența de fază dintre fazele mărimilor i și u , este pozitiv ($\varphi > 0$), fapt stabilit în experiment.

Valoarea instantanee a intensității curentului, fiind dată de relația $i = dq/dt$, se poate scrie:

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi) .$$

Pentru ca relația de mai sus să se verifice, trebuie ca:

$$q = \frac{\sqrt{2}I}{\omega} \sin(\omega t + \varphi - \pi/2) = -\frac{\sqrt{2}I}{\omega} \sin(\omega t + \varphi + \pi/2) .$$

Ecuția (2.2), care exprimă legea lui Ohm pentru circuitul serie RC, devine:

$$\sqrt{2}U \sin \omega t = -\frac{\sqrt{2}I}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi + \pi/2) + R\sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi) .$$

Folosind reprezentarea fazorială (vezi figura 2.18), se observă că:

Fazorul $\overrightarrow{OA}$, de modul RI , reprezintă termenul $R\sin(\omega t + \varphi)$.

Fazorul $\overrightarrow{AB}$, de modul $I/\omega C$, reprezintă termenul $-\frac{I}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Fazorul $\overrightarrow{OB}$, de modul U , reprezintă termenul $U\sin\omega t$.

Din figura 2.18 se deduc valorile pentru I și $\tan \varphi$ în funcție de U , R , C , ω ; astfel, în triunghiul dreptunghic OAB se pot scrie relațiile:

$$U = I\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad \text{și} \quad \tan \varphi = \frac{-1}{\omega CR} .$$

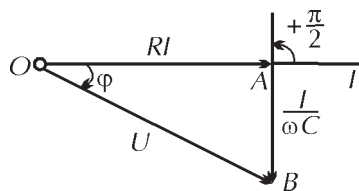


Fig. 2.18

Reprezentarea prin fazoni a circuitului RC serie.

Definiție

Termenul $X_C = \frac{1}{\omega C}$ se numește *reactanță capacitivă*.

Mărimea $Z = \sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$ se numește *impedanța circuitului serie RC*.

Relația: $U = I\sqrt{R^2 + X_C^2} = I \cdot Z$ exprimă legea lui Ohm, în mărimi efective, pentru circuitul serie RC.

• Cazul particular al unui *circuit care conține numai condensator ideal*. În acest caz, $R = 0$ și $I = \omega CU$, iar $\tan \varphi = \infty$.

Așadar:

Intensitatea i a curentului printr-un circuit care conține un condensator ideal este defazată înaintea tensiunii aplicate u cu $\pi/2$ și are valoarea efectivă:

$$I = \omega CU = U/X_C$$

(relație care exprimă legea lui Ohm pentru circuitul cu condensator ideal).

2

Cazul circuitului cu condensator ideal este mai des întâlnit în practică, deoarece se pot construi asemenea condensatoare cu dielectrici, ceea ce este echivalent cu a considera rezistența activă a condensatorului nulă. Rezistența firelor de legătură cu sursa se neglijează și ea, fiind de ordinul zecimilor de miimi de ohmi.

Spre deosebire de cazul circuitului cu condensator ideal, un circuit cu bobină ideală nu este realizabil, în practică, deoarece sârma spirelor bobinei nu are rezistența neglijabilă. Se admite, totuși, că o bobină poate fi considerată ideală dacă reactanța ei este mult mai mare decât rezistența sârmei care o compune.

• **Observație.** Pentru tensiuni de frecvențe mici, reactanța unui condensator poate căpăta valori mari, ceea ce duce, practic, la blocarea trecerii curentului; pentru tensiuni de frecvență înaltă, însă, condensatorul constituie un scurtcircuit. Aceste proprietăți ale condensatorului sunt folosite în montajele electronice.

Aplicație

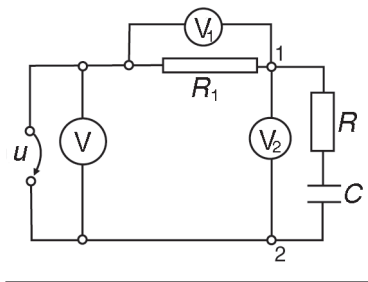


Fig. 2.19

Voltmetrele din figura 2.19 indică tensiunile efective $U = 193$ V, $U_1 = 60$ V și $U_2 = 180$ V, frecvența tensiunii aplicate fiind $\nu = 50$ Hz. Cunoscând $R_1 = 20 \Omega$, să se calculeze valorile pentru R , C și $\tau (= RC)$.

Soluție:

Impedanța porțiunii de circuit dintre punctele 1 și 2 este:

$$Z_{1,2} = \sqrt{R^2 + 1/C^2\omega^2} = U_2 / I,$$

unde intensitatea curentului este $I = U_1/R_1 = 60/20 = 3$ A.

Din triunghiul OAB al diagramei fazoriale din figura 2.20 rezultă:

$$U_2^2 = U_1^2 + U^2 - 2U_1U \cos \varphi,$$

$$\text{de unde: } \cos \varphi = \frac{U_1^2 + U^2 - U_2^2}{2U_1U} =$$

$$= \frac{60^2 + 193^2 - 180^2}{2 \cdot 193 \cdot 60} = 0,365.$$

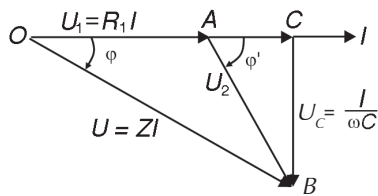


Fig. 2.20

Din figura 2.20 rezultă $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$ sau $U \cos \varphi = U_1 + RI$. Se obține $R = 3,5 \Omega$. Introducând valoarea lui R în relația impedanței, se obține $C = 53,3 \mu\text{F}$.

$$\tau = RC = 1,86 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

În cazul unui **condensator cu pierderi**, rezistența rezistorului R poate fi considerată chiar rezistența echivalentă pierderilor prin disipare de căldură, la trecerea curentului alternativ printr-un condensator cu dielectric ($Q = RI^2t$). Cu un montaj ca cel din figura 2.19 se pot măsura, deci, mărimile R și C ale unui condensator cu pierderi.

2.1.6. Circuit serie cu rezistor, bobină și condensator în curent alternativ (circuit RLC serie)

2.1.6.1. Analiza circuitului RLC serie

Experiment

Studiul comportării unui circuit serie RLC în curent alternativ se poate face cu ajutorul unui montaj a cărui schemă este prezentată în figura 2.21, bobina și condensatorul având inductanța, respectiv capacitatea variabile. Conectând circuitul la sursa de tensiune alternativă, se poate observa, cu ajutorul ampermetrului, că:

- variația capacității condensatorului, C , menținând o valoare constantă pentru L , poate duce la o creștere a intensității curentului prin circuit, la trecerea acesteia printr-un maxim, urmată de o descreștere a sa (fig. 2.22);
- menținând C constant, variația lui L poate corespunde unei creșteri a intensității efective a curentului prin circuit, a trecerii acesteia prin maxim, urmată de o descreștere a sa (fig. 2.23).

Studiul osciloscopic asupra circuitului serie RLC (fig. 2.24) arată că, pentru valori convenabile alese pentru L și C , efectul inductiv (i defazat în urmă față de u) poate să predomină sau, dimpotrivă, i poate să prezinte o defazare înainte față de u . Acest lucru dovedește că în circuit predomină efectul capacitiv (fig. 2.25). Deci, în ceea ce privește defazajul dintre u și i , bobina are un efect antagonist față de acela al condensatorului.

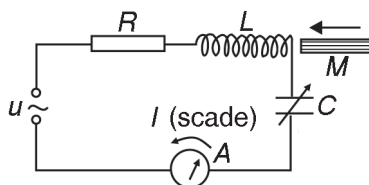


Fig. 2.21

Circuit pentru stabilirea regimului de rezonanță a circuitului RLC serie.

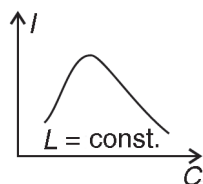


Fig. 2.22

Variația lui I pentru $L = \text{const.}$ și C variabil.

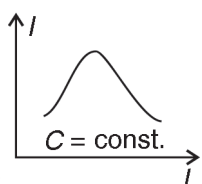


Fig. 2.23

Variația lui I pentru $C = \text{const.}$ și L variabil.

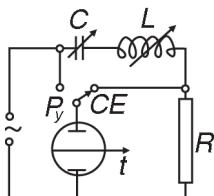


Fig. 2.24

Schema montajului pentru studiul osciloscopic al circuitului RLC.

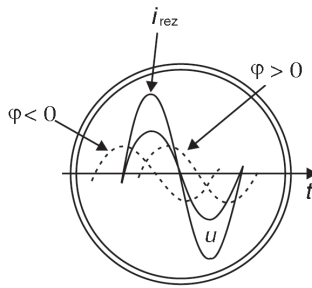


Fig. 2.25

Regimurile capacitiv, inductiv și de rezonanță în circuitul RLC serie.

Studiul teoretic al comportării circuitului RLC în curent alternativ confirmă rezultatele experimentale.

Ecuția tensiunilor instantanee pentru circuitul serie RLC este dată de legea lui Ohm:

$$u + \left(-L \frac{di}{dt}\right) = \frac{q}{C} + R \cdot i,$$

unde: u – tensiunea sursei de alimentare; $\left(-L \frac{di}{dt}\right)$ – t.e.m. de autoinducție; $\frac{q}{C}$ – tensiunea la bornele condensatorului; $R \cdot i$ – căderea de tensiune pe rezistor.

Știind că defazajul dintre u și i este exprimat prin unghiul φ , intensitatea instantanee a curentului prin circuitul cu elementele reactive, bobină și condensator, poate fi scrisă sub forma: $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$, cu $\varphi > 0$, dacă predomină aspectul inductiv, și $\varphi < 0$, dacă predomină aspectul capacitiv. Sarcina electrică instantanee, q , a suprafeței armăturii condensatorului poate fi exprimată cu ajutorul lui i plecând de la expresia: $i = \frac{dq}{dt} = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$, de unde, după cum știm:

$$q = -\frac{\sqrt{2}I}{\omega} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Cu această expresie pentru q și cunoscând că:

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{2}\omega I \sin(\omega t - \varphi + \pi/2), \text{ ecuația tensiunilor poate fi scrisă sub forma:}$$

$$U \sin \omega t = \omega L I \sin(\omega t - \varphi + \pi/2) - \frac{I}{\omega C} \sin(\omega t - \varphi + \pi/2) + R I \sin(\omega t - \varphi).$$

2.1.6.2. Reprezentarea fazorială a circuitului RLC serie

Reprezentarea fazorială* dă pentru fazori modulele (fig. 2.26, a, b, c):

$$\text{pentru } \overline{OA} : RI = U_R; \text{ pentru } \overline{AB} : \omega LI = U_L; \text{ pentru } \overline{BC} : \frac{1}{\omega C} I = U_C;$$

$$\text{pentru } \overline{OC} : U.$$

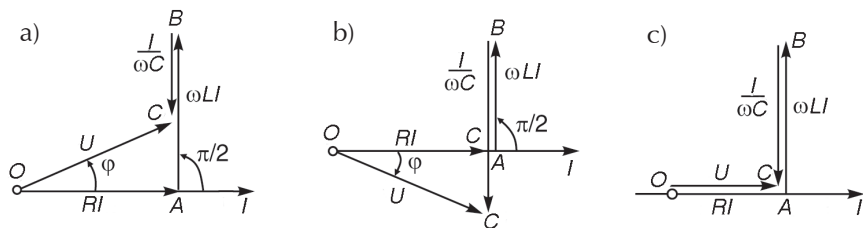


Fig. 2.26 Diagrame fazoriale ale circuitului RLC serie.

* În cele ce vor urma, la circuitele de curent alternativ, unghiul φ va reprezenta defazajul φ al fazei tensiunii u înaintea intensității curentului i , mărime algebrică ce satisface condiția $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Corespunzător, arcul de cerc care va indica unghiul φ va fi orientat spre fazorul tensiunii u .

În figura 2.26, a, b, c, se observă că sunt posibile trei cazuri:

a) dacă $U_L > U_C$, adică $\omega L > 1/\omega C$, efectul inductiv predomină față de cel capacitiv; intensitatea curentului este defazată în urmă față de tensiune, deci $\varphi > 0$;

b) dacă $U_L < U_C$, adică $\omega L < 1/\omega C$, efectul capacitiv predomină față de cel inductiv; intensitatea curentului este defazată înainte față de tensiune, deci $\varphi < 0$;

c) dacă $U_L = U_C$, adică $\omega L = 1/\omega C$, cele două efecte se compensează, $\varphi = 0$; cazul este numit **rezonanță** și va fi analizat separat.

Pentru $U_L \neq U_C$ (fig. 2.26, a, b), din triunghiul tensiunilor OAC rezultă:

$$U = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{sau:}$$

$$U = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I \cdot Z \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad Z \text{ fiind } \textit{impedanța} \text{ circuitului serie } RLC.$$

Formula $U = I \cdot Z$ exprimă legea lui Ohm, în mărimi efective, pentru circuitul RLC.

2.1.6.3. Rezonanța circuitului RLC serie.

Rezonanța tensiunilor. Aplicații practice

Dacă pentru un circuit serie RLC, alimentat de la o sursă de tensiune efectivă U , se aleg valori pentru L , C sau ω astfel încât $X_L = X_C$, adică:

$$\omega L = 1/\omega C, \quad (2.3)$$

circuitul RLC se află în regim de **rezonanță**.

În acest caz, tensiunile la bornele bobinei, u_L , și la bornele condensatorului, u_C , opuse ca fază, devin egale și $U_L - U_C = 0$, iar defazajul dintre intensitatea curentului și tensiunea la bornele circuitului devine zero. Diagrama fazorială pentru rezonanța circuitului serie RLC capătă forma din figura 2.26, c. Rezonanța la circuitul serie, dată de relația 2.3, se mai numește și **rezonanța tensiunilor**. În condițiile rezonanței, intensitatea curentului devine maximă, $I_r = U/R$, iar tensiunile efective la bornele bobinei și ale condensatorului devin maxime:

$$U_L = I_r X_L = \left(\frac{U \omega L}{R} \right)_{\omega=\omega_0} \quad \text{și} \quad U_C = I_r X_C = \left(\frac{U}{\omega RC} \right)_{\omega=\omega_0}.$$

Raportul notat cu Q :

$$Q = \left(\frac{U_L}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC},$$

care arată de câte ori este mai mare, la rezonanță, tensiunea la bornele bobinei sau ale condensatorului decât tensiunea generatorului, se numește **factor de supratensiune** (sau **factor de calitate al circuitului**).

Valoarea ridicată a tensiunii de la bornele bobinei și ale condensatorului prezintă o particularitate extrem de interesantă a rezonanței serie.

În instalațiile industriale pentru transmisia și utilizarea energiei electrice în curent alternativ, apariția supratensiunilor poate să ducă la descărcări electrice

între spirele bobinajelor sau între armăturile condensatoarelor, prin străpungerea materialelor izolante, și să dea naștere la deteriorări sau accidente.

În radiocomunicații, rezonanța serie este utilizată pentru obținerea intensității curentului și a tensiunii maxime în circuit. De exemplu, pentru a se obține în antenă un curent de intensitate maximă, circuitul de antenă al unei stații de emisie radio este întotdeauna de tip serie; în acest caz, bătaia stației este, și ea, maximă.

Rezolvând ecuația 2.3 în raport cu ω , se obține:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad (2.4)$$

ceea ce înseamnă că, la rezonanță, perioada tensiunii alternative aplicate la bornele circuitului trebuie să fie $T = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ (formula lui Thomson), adică să fie egală cu perioada de „oscilație proprie”, $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, a circuitului.

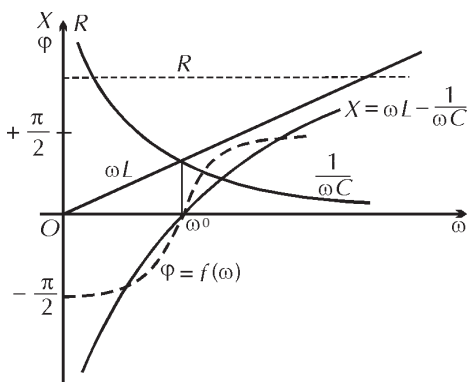


Fig. 2.27

În figura 2.27 sunt reprezentate, în funcție de ω , mărimile reactive (X , X_L , X_C) și defazajul φ pentru circuitul serie RLC .

Ținând cont de expresia pulsației ω la rezonanță (2.4) se obține:

$$\left(\frac{U_L}{U}\right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{U_C}{U}\right)_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

de unde rezultă că:

$$U_L = U_C \gg U \text{ dacă } R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Mărimia $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ are dimensiunile unei rezistențe și se numește **impedanța caracteristică** a circuitului serie. Relația de dependență între factorul de

calitate și impedanța caracteristică, pentru un circuit serie RLC , este $Q = \frac{1}{R} Z_0$.

În concluzie, circuitele cu rezonanță de tensiune se utilizează pentru amplificarea tensiunilor slabe, având frecvența egală cu frecvența de rezonanță proprie circuitelor respective.

Analogie mecanică. Circuitul RLC , la bornele căruia se aplică o tensiune alternativă, se comportă ca un sistem excitat. Sursa de t.e.m. alternativă are rolul de excitator, rezistența circuitului corespunzând frecării cu mediul, din cazul pendulului elastic. Constanta pendulului, k , are ca echivalent pe $1/C$, iar masa pendulului, pe L . Sursa de t.e.m. alternativă întreține în circuitul RLC un curent alternativ cu aceeași perioadă ca cea a t.e.m., intensitatea curentului fiind dată de legea lui Ohm; circuitul funcționează, deci, în regim de **oscilații forțate**.

Dacă perioada t.e.m. este egală cu $2\pi\sqrt{LC}$, perioada de oscilație proprie a circuitului RLC, în circuit se produc oscilații de amplitudine mare ale electronilor de conducție, caracterizate prin tensiuni și intensități de curent mari. Sursa va debita o putere relativ mică, necesară numai pentru compensarea pierderilor de energie prin efect Joule, ce se datorează rezistenței circuitului, R . Generatorul și circuitul RLC pot fi asemănați cu un sistem de doi oscilatori cuplați în serie, funcționând în regim de rezonanță. Tot astfel, poate fi făcut să oscileze, la rezonanță, un pendul.

Pornind de la formula generală care exprimă legea lui Ohm pentru circuitul serie,

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

se poate construi cu precizie graficul curbei variației intensității efective a curentului prin circuitul RLC în funcție de mărimile L , C sau ω . Această curbă poate fi obținută calitativ și prin variația lui L sau a lui C în montajul ilustrat de figura 2.21. Maximul curbei (pentru $L = 1/\omega^2 C$) arată că, într-adevăr, cu cât rezistența circuitului este mai mică, cu atât intensitatea curentului la rezonanță, I_r , este mai mare. Curbele din figura 2.28 se numesc **curbe de rezonanță**, forma lor fiind asemănătoare curbei obținute la studiul rezonanței mecanice.

Pentru studiul experimental al regimurilor reactive ($\varphi < 0$, $\varphi > 0$) și al rezonanței ($\varphi = 0$) circuitului serie RLC este descris în continuare experimentul cu titlul:

Experiment

Determinarea defazajului φ dintre tensiunea u și intensitatea i pentru circuitul serie RLC de curent alternativ.

Metoda elipsei

Conform figurii 2.29, a, se aplică plăcilor de deflexie verticală tensiunea $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$, iar plăcilor de deflexie orizontală, tensiunea $u_R = R \cdot i$ de pe

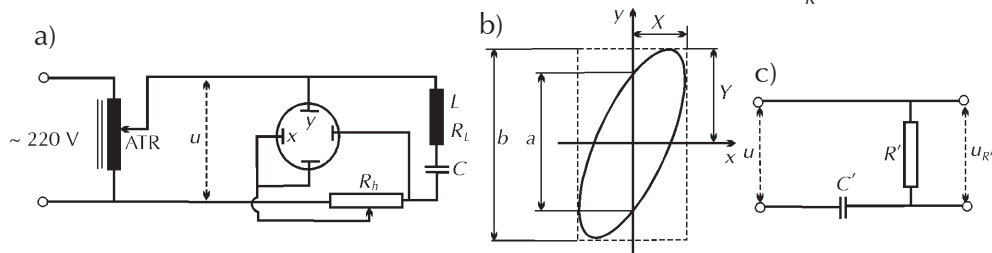


Fig. 2.29

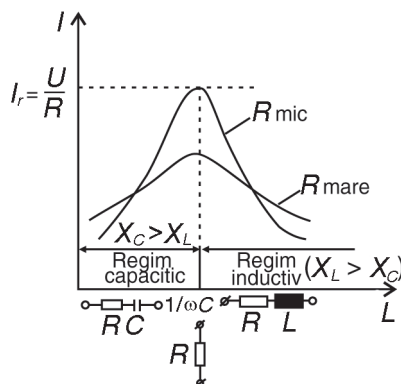


Fig. 2.28 Curba de rezonanță pentru circuitul RLC serie

rezistorul R , care este în fază cu intensitatea $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$ din circuitul serie. Pe ecranul osciloscopului va apărea o elipsă (fig. 2.29, b).

Se reglează tensiunea efectivă de alimentare a circuitului serie, U , și amplificările pe orizontală și verticală, astfel încât elipsa să aibă dimensiuni convenabile. Cu ajutorul rețelei de coordonate se măsoară segmentul a , determinat de elipsă pe axa verticală, Y . De asemenea, se măsoară proiecția b a elipsei pe aceeași axă. Cu aceste valori se calculează unghiul de defazaj φ din relația $\sin \varphi = \frac{a}{b}$. Pentru aflarea semnelui unghiului de defazaj se intercalează

între bornele circuitului și plăcile de deflexie verticală un circuit defazor $R'C'$ (fig. 2.29, c). La acest circuit tensiunea de ieșire, $u_r = R \cdot i$, este defazată înainte față de tensiunea de intrare, u . Dacă elipsa inițială se lărgeste prin introducerea circuitului defazor, defazajul determinat este de același semn cu cel al circuitului suplimentar $R'C'$, adică negativ. Ca atare, defazarea în circuitul analizat este capacitivă ($X_C > X_L$, $\varphi < 0$), iar dacă elipsa se îngustează, defazajul este de semn pozitiv ($X_L > X_C$, $\varphi > 0$).

- Dacă frecvența ν a tensiunii u ar crește, defazorul fiind scos, s-ar obține rezonanța, $a = 0$, $\varphi = 0$ ($X_L = X_C$, $\nu = \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$); frecvența crescând în continuare, circuitul RLC devine inductiv din punct de vedere reactiv. La rezonanță, elipsa devine o dreaptă înclinată ($a = 0$).

- Se compară valoarea unghiului de defazaj obținut experimental ($\varphi = \arcsin \frac{a}{b}$) cu cea obținută prin calcul, pe baza relației $\varphi = \arctg \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$, valorile elementelor R , L , C și a frecvenței, ν , fiind cunoscute.

Indicații: $U = 10 \text{ V}$, $R \approx 300 \Omega$, $L \approx 10^{-1} \text{ H}$, $C \approx 10 \mu\text{F}$, $\nu = 50 \text{ Hz}$. R' și C' de același ordin de mărime ca R și C (condensatorii sunt electrolitici).

Aplicație

Circuitul serie RLC din figura 2.20, pentru care $R = 4 \Omega$, $L = 6,37 \text{ mH}$ și capacitatea condensatorului variabil fixată pentru $C = 159 \mu\text{F}$, este alimentat de un generator cu tensiunea efectivă $U = 120 \text{ V}$ și frecvența $\nu = 200 \text{ Hz}$.

1. Să se determine:

- intensitatea curentului din circuit și tensiunile $U_{R'}$, $U_{L'}$, $U_{C'}$;
- defazajul dintre intensitatea curentului și tensiunea la bornele circuitului;
- valoarea capacității condensatorului variabil pentru care în circuit

apare rezonanța;

d) factorul de supratensiune (factorul de calitate) al circuitului.

2. Este posibil să se înlocuiască bobina și condensatorul (având $C = 159 \mu\text{F}$) din circuitul inițial cu o bobină echivalentă?

$$1. a) X_L = \omega L = 2\pi L \approx 8 \, \Omega, X_C = \frac{1}{2\pi\nu C} \approx 5 \, \Omega.$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{120}{\sqrt{16 + 9}} = 24 \, \text{A};$$

$$U_R = R \cdot I = 4 \cdot 24 = 96 \, \text{V}, U_L = X_L \cdot I = 8 \cdot 24 = 192 \, \text{V}.$$

$$U_C = X_C \cdot I = 5 \cdot 24 = 120 \, \text{V}.$$

$$\text{Verificare (fig. 2.30): } U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = 120 \, \text{V}.$$

$$b) \tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{3}{4} = 0,75; \varphi = 37^\circ.$$

$$c) \text{ La rezonanță } X_{C_r} = X_L, \text{ de unde } C_r = \frac{1}{\omega X_L} = \frac{1}{1256 \cdot 8} = 99,5 \, \mu\text{F}.$$

$$d) I_r = \frac{U}{R} = 30 \, \text{A}; U_R = I_r \cdot R = 120 \, \text{V}, U_L = I_r \cdot X_L = 240 \, \text{V},$$

$$U'_C = I_r \cdot X'_C = 240 \, \text{V}.$$

(La rezonanță U'_L și U'_C sunt egale, iar U'_L și U'_C , în opoziție de fază, astfel încât $U'_L - U'_C = 0$.)

$$Q = \frac{U'_L}{U} = \frac{U'_C}{U} = 2.$$

2. Întrucât $U_L > U_C$, circuitul are caracter inductiv și totul se petrece ca și cum în circuit ar exista numai o bobină cu inductanța echivalentă:

$$L_e = \frac{X}{\omega} = \frac{X_L - X_C}{\omega} = 2,4 \, \text{mH} \, (X \text{ este reactanța circuitului}).$$

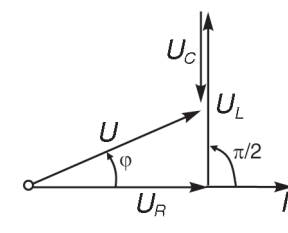


Fig. 2.30

2.1.7. Circuitul paralel RLC în curent alternativ.

Rezonanța curenților* (extindere)

Circuitul conține un rezistor cu rezistența R , o bobină cu inductanța L și un condensator cu capacitatea C , toate legate în paralel (în derivație) la o sursă de tensiune alternativă $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ (fig. 2.31, a). Prin cele trei ramuri ale circuitului se stabilesc curenți cu intensitățile:

$$i_R = \frac{\sqrt{2}U}{R} \sin \omega t, i_L = \frac{\sqrt{2}U}{X_L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), i_C = \frac{\sqrt{2}U}{X_C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Aplicând teorema I a lui Kirchhoff, intensitatea totală, care, în general, nu va fi în fază cu tensiunea aplicată, are expresia $i = i_R + i_L + i_C$.

Rezultă:

$$I \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U}{R} \sin \omega t + \frac{U}{X_L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{U}{X_C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.5)$$

La momentele $t_1 = 0$ și $t_2 = \pi/2\omega = T/4$, relația (2.5) devine:

$$I \sin \varphi = U \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right); \quad I \cos \varphi = \frac{U}{R}. \quad (2.6)$$

Câtul acestor ultime două relații permite obținerea tangentei defazajului φ dintre tensiunea și intensitatea curentului total: $\operatorname{tg} \varphi = R \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right)$.

Ridicând relațiile (2.6) la pătrat și adunând se obține:

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2}. \quad (2.7)$$

Formula $U = I \cdot Z$, care exprimă legea lui Ohm, în valori efective, pentru circuitele de curent alternativ, permite stabilirea expresiei pentru impedanța circuitului RLC paralel. Astfel, din relația (2.7) rezultă:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2}}.$$

Folosind relația (2.5) se poate construi diagrama fazorială a circuitului RLC paralel, considerând, ca fază origine, faza tensiunii aplicate u (fig. 2.31, b).

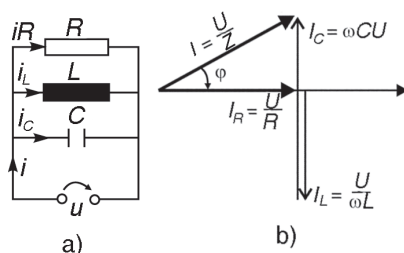


Fig. 2.31

Circuit RLC paralel:
a – schema circuitului;
b – diagrama fazorială.

2.1.7.1. Rezonanța circuitului paralel. Rezonanța curenților

Experiment

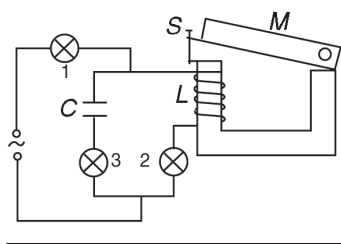


Fig. 2.32

Montaj pentru demonstrarea fenomenului de rezonanță în circuitul paralel.

În montajul din figura 2.32, prin ridicarea sau prin coborârea miezului M cu ajutorul șurubului S , se găsește poziția pentru care becul 1 se stinge sau luminează cu intensitate minimă. Deplasarea miezului M în sus sau în jos față de această poziție face să scadă intensitatea luminii becului 2 sau 3 și să crească intensitatea luminii becului 1.

Considerând un circuit paralel LC (fig. 2.31, a), condiția de rezonanță $X_L = X_C$ impune anularea intensității curentului total:

$I_{rez} = U \left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} \right) = 0$. Deci, impedanța circuitului la rezonanță tinde spre infinit*:

* Practic, ea devine doar mare, deoarece bobina prezintă și o rezistență activă, aceasta fiind rezistența sârmei din care este alcătuită.

$$Z_{\text{rez}} = \frac{1}{\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}} \rightarrow \infty, \text{ pentru curenții care au frecvența corespunzătoare}$$

condiției $LC\omega_0^2 = 1$. Rezultă: $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Deși intensitatea curentului total este zero la rezonanță, în interiorul circuitului serie format din bobină și condensator oscilează un curent de intensitate efectivă:

$$I' = U\omega_0 C = \frac{U}{\omega_0 L}.$$

Această situație este posibilă deoarece curentul din ramura bobinei este totdeauna de sens contrar cu cel din ramura condensatorului (fig. 2.33, a, b).

Ridicarea miezului de fier M mai sus de poziția pentru care se obține rezonanța circuitului atrage modificarea reactanței ramurii L , în sensul micșorării ei, $X_L < X_C$ și becul 2 va lumina mai intens decât becul 3.

Coborârea miezului de fier M , implică $X_C < X_L$, iar becul 3 va fi cel care va lumina mai intens. În ambele cazuri, intensitatea curentului total I fiind mai mare decât I_{rez} , becul 1 va lumina.

Rezonanța circuitului LC paralel se mai numește și *rezonanța curenților*.

Factorul de calitate Q la circuitele RLC paralel (fig. 2.31) este definit ca

$$\text{raportul } Q = \left(\frac{I_C}{I} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{UC\omega}{I} \right)_{\omega=\omega_0} = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} = RY_0; \quad Y_0 \left(= \frac{1}{Z_0} \right) \text{ se numește}$$

admitanță caracteristică.

Intensitățile curenților din cele două laturi, I_C și I_L , pot atinge la rezonanță valori efective cu mult mai mari decât ale curentului absorbit, I . Din acest motiv, circuitul se mai numește și *circuit cu rezonanță de curent*. Este utilizat pentru amplificarea curenților slabi, având frecvența egală cu frecvența de rezonanță a circuitului, ν_0 .

Aplicație

Un circuit paralel RLC (fig. 2.31, a), alimentat cu o tensiune alternativă de valoare efectivă U și frecvență ν' , este parcurs de un curent total de intensitate efectivă minimă $I_{\text{min}} = 5$ A, bobina fiind parcursă de un curent de intensitate $I_L' = 5$ A. Care este valoarea efectivă a intensității curentului total, I , la o frecvență $\nu = 5\nu'$?

Soluție:

Intensitatea curentului total are valoarea minimă atunci când suma curenților prin condensator, I_C , și prin bobina ideală, I_L , este nulă, adică la

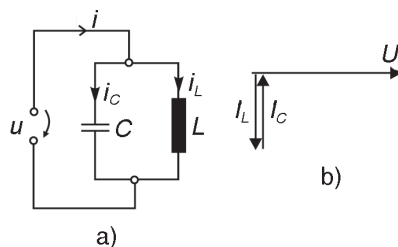


Fig. 2.33 Rezonanța circuitului LC paralel; a) schema circuitului; b) diagrama fazorială.

rezonanță de curent. În acest caz, tot curentul debitat de generator trece prin rezistorul R , $I_{\min} = I_R$ și $I'_C = I'_L = 5 \text{ A}$. Mărand frecvența de cinci ori (deci $\omega = 5\omega'$), reactanța bobinei ideale devine $X = \omega L = 5\omega' L = 5 X'_L$, iar reactanța capacitivă devine $X_C = 1/(\omega C) = 1/(5\omega' C) = 5 X'_C$. Ca urmare,

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{1}{5} I'_L = 1 \text{ A}, \quad I_C = 5 I'_C = 25 \text{ A},$$

de unde rezultă intensitatea efectivă a curentului total:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{5^2 + 24^2} = \sqrt{25 + 576} \approx 24,5 \text{ A}.$$

În acest caz, deoarece $I_L < I_C$, adică $X_L > X_C$, circuitul paralel prezintă un aspect capacitiv.

2.1.8. Analiza din punct de vedere energetic a funcționării circuitelor de curent alternativ. Îmbunătățirea factorului de putere

În circuitele de curent continuu, puterea este dată de relația $P = U \cdot I$. Ea reprezintă energia disipată în unitatea de timp prin trecerea unui curent continuu de intensitate I printr-un circuit la capetele căruia este aplicată tensiunea continuă U .

În circuitele de curent alternativ, valoarea instantanee a puterii este dată de produsul dintre valorile instantanee ale tensiunii și intensității curentului electric:

$$p = u \cdot i = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

unde φ este defazajul dintre u și i . Folosind identitatea trigonometrică:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)],$$

puterea instantanee se mai poate scrie sub forma:

$$p = \underbrace{\frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi}_{\text{componentă constantă}} - \underbrace{\frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{componentă alternativă}}. \quad (2.8)$$

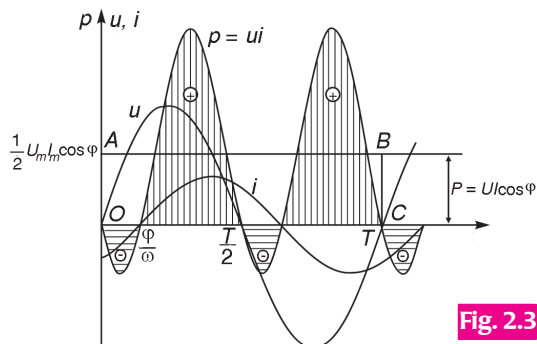


Fig. 2.34

În figura 2.34 sunt redată curbele intensității curentului, ale tensiunii și ale puterii. Se observă că puterea instantanee poate să ia, la momente diferite, valori diferite – pozitive, negative sau nule.

Puterea instantanee și puterea medie într-un circuit de curent alternativ, pentru cazul $X_L > X_C$. Se observă că, pe o perioadă, valorile medii ale mărimilor u și i sunt nule. Valoarea medie $\bar{p}$ este însă diferită de zero, deoarece, după cum se vede și în figură, produsul $p = ui$ a două mărimi oscilatorii armonice nu mai reprezintă o mărime oscilatorie armonică.

Pentru a putea caracteriza un circuit în curent alternativ, din punct de vedere al consumului mediu de energie în unitatea de timp, să stabilim expresia puterii medii, $\bar{p}$, corespunzătoare unei perioade a curentului alternativ.

Diagrama variației puterii instantanee cu timpul arată că, pentru o perioadă, suprafețele hașurate situate deasupra liniei $\frac{1}{2}U_m I_m \cos \varphi$ umplu locurile rămase libere între abscisă și această linie și anulează domeniile negative (hașurate, sub axa abscisă). Ca urmare, energia absorbită de la sursă în circuitul de curent alternativ, într-o perioadă T , va fi egală cu aria dreptunghiului $OABC$ (fig. 2.34):

$$W = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi \cdot T.$$

De aceea, într-o perioadă, valoarea medie a puterii unui circuit de curent alternativ este egală cu componenta constantă a puterii instantanee, p , scrisă sub forma relației 2.8, adică:

$$P = \bar{p} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

Astfel, puterea medie sau *puterea activă* a circuitului de curent alternativ este egală cu produsul valorilor efective ale tensiunii și intensității curentului înmulțit cu cosinusul unghiului de defazaj între intensitatea curentului și tensiune:

$$P = UI \cos \varphi.$$

Factorul $\cos \varphi$ se numește *factor de putere*.

Din figura 2.26, a se obține $\cos \varphi = R/U$. Înlocuind în expresia puterii medii, obținem:

$$P = U_R \cdot I = I^2 R.$$

Rezultă că puterea medie, adică puterea activă în circuitul de curent alternativ, este egală cu puterea disipată de același curent în rezistor, prin efect Joule, și se exprimă în wați (W).

Din expresia (2.8) observăm că puterea instantanee oscilează cu pulsația 2ω în jurul unei valori medii – puterea activă, P – (fig. 2.34). În momentele din decursul unei perioade, când puterea primită, p , este negativă (este cedată sursei), energia câmpului electric al condensatorului (cazul $X_C > X_L$) sau a câmpului magnetic al bobinelor (cazul $X_L > X_C$) este parțial restituită sursei de alimentare.

La rezonanță ($X_L = X_C$, $\varphi = 0$), bobina și condensatorul schimbă oscilant energia între ele, sursa transferând circuitului numai putere activă pentru compensarea pierderilor prin efect Joule.

Înmulțind cu I mărimile laturilor triunghiului fazoric al tensiunilor (fig. 2.26, a) se obține triunghiul asemenea (nefazoric) numit „triunghiul puterilor” (fig. 2.35). Cateta $P = U_R \cdot I = I^2 R$ reprezintă *puterea activă*. Cum $U_R = U \cos \varphi$, rezultă $P = UI \cos \varphi$.

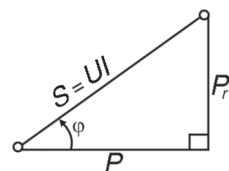


Fig. 2.35 Triunghiul puterilor.

Definiție

Produsul $S = UI$ reprezintă valoarea maximă a puterii active la valori efective constante ale tensiunii și curentului și la defazaj variabil și se numește *putere aparentă*. Aceasta exprimă energia transferată circuitului, în unitatea de timp, de către sursa de alimentare.

Se măsoară în voltamper (VA).

Pentru ca o anumită instalație de putere aparentă dată, $S = UI$, să funcționeze cu maximum de putere activă, $P = UI \cos \varphi \approx S$, deci cu maximum de eficacitate, factorul de putere $\cos \varphi$ corespunzător trebuie să fie cât mai mare (mai apropiat de unitate), adică defazajul φ trebuie să fie cât mai mic. De aici rezultă una dintre problemele tehnico-economice cele mai importante ale electroenergeticii: problema ameliorării factorului de putere $\cos \varphi$.

Puterea reactivă se definește prin relația:

$$P_r = UI \sin \varphi = U_X I = XI^2 \underset{> 0}{\neq} 0 \text{ și e nulă pentru circuitele rezistive.}$$

Aceasta este folosită în inductor (bobină) și în condensator pentru a se genera câmpul magnetic, respectiv electric, și se exprimă în voltamperi-reactivi (var)*.

Între puterea aparentă, puterea activă și puterea reactivă există relațiile:

$$P_r^2 + P^2 = S^2; P_r = P \cdot \operatorname{tg} \varphi; P = S \cdot \cos \varphi; P_r = S \cdot \sin \varphi,$$

care se rețin ușor cu ajutorul triunghiului puterilor.

Folosind relația $P = S \cos \varphi$, factorul de putere se poate scrie:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{\sqrt{S^2 - P_r^2}}{S} = \sqrt{1 - \frac{P_r^2}{S^2}},$$

de unde rezultă că *problema ameliorării factorului de putere $\cos \varphi$ e echivalentă cu reducerea puterii reactive P_r* .

În general, instalațiile electrice receptoare sunt inductive (transformatoare, motoare asincrone etc.), absorbind de la rețeaua de alimentare un curent inductiv, defazat în urma tensiunii. Îmbunătățirea factorului de putere se realizează conectând, în paralel cu receptorul, condensatoare sau motoare sincrone supraexcitate (intensitatea curentului continuu de excitație a circuitului magnetic rotoric fiind mai mare decât o valoare de prag). În acest regim de supraexcitare motoarele sincrone prezintă o reactanță capacitivă.

Observație. Cu toate că a fost definită pe baza unei relații construite prin analogie cu puterea activă, puterea reactivă nu are însă interpretarea energetică simplă a acesteia – adică nu corespunde unui aport mediu de energie pe la borne. Ea reprezintă o măsură a necompensării schimburilor de energie între câmpul magnetic al bobinei și câmpul electric al condensatorului:

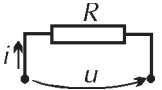
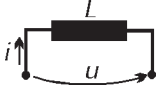
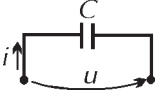
$$P_r = XI^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) I^2 = 2\omega \left(\frac{1}{2} LI^2 - \frac{1}{2} \frac{I^2}{C\omega^2} \right) = 2\omega \left[\frac{1}{2} LI^2 - \frac{1}{2} CU_C^2 \right] = 2\omega (\widetilde{W}_m - \widetilde{W}_e),$$

în care $\widetilde{W}_m$ reprezintă valoarea medie a energiei câmpului magnetic, iar $\widetilde{W}_e$

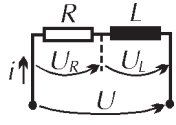
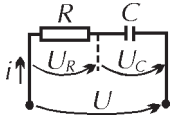
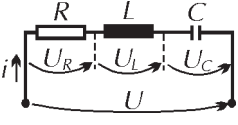
* Unitate adoptată de Comisia Electrotehnică Internațională, în 1930, la propunerea academicianului român Constantin Budeanu (1886–1959).

reprezintă valoarea medie a energiei câmpului electric. Energiile sunt variabile în timp, cu pulsația 2ω . Considerând medierea energiilor pe o perioadă, cazul $\widetilde{W}_m = \widetilde{W}_e$ înseamnă compensarea variațiilor respectivelor energii, care conduce la anularea puterii reactive. Fenomenul are loc la rezonanță ($\varphi = 0$).

Elemente de circuit în curent alternativ – mărimi caracteristice

Circuitul			
Intensitatea instantanee, $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - u)$	$i = \frac{U}{R} \sqrt{2} \sin \omega t$	$i = \frac{U}{L\omega} \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$	$i = C\omega U \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
Impedanța, Z	$Z = R$	$Z = L\omega$	$Z = \frac{1}{C\omega}$
Intensitatea (valoarea efectivă), I	$I = \frac{U}{R}$	$I = \frac{U}{L\omega}$	$I = C\omega U$
Reactanța, X	$X = 0$	$X = L\omega$	$X = -\frac{1}{C\omega}$
Defazajul, φ ($\tan \varphi = \frac{X}{R}$)	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
Factorul de putere, $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$	1	0	0
Puterea activă, $P = UI \cos \varphi$	$P = UI = RI^2$	0	0
Puterea reactivă, $P_r = UI \sin \varphi$	0	$P_r = UI = L\omega I^2$	$P_r = UI = -\frac{1}{C\omega} I^2$

Circuite serie – mărimi caracteristice

Circuitul			
Intensitatea instantanee, i	$i = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$	$i = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$	$i = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$
Impedanța, Z	$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$	$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$	$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$
Intensitatea (valoarea efectivă), I	$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$	$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}}$	$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$
Reactanța, X	$X = L\omega$	$X = -\frac{1}{C\omega}$	$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$

Defazajul, φ $\left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}\right)$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{1}{C\omega}}{R}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$
Factorul de putere, $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$	$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$	$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$	$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$
Puterea activă, $P = UI \cos \varphi$	$P = RI^2$	$P = RI^2$	$P = RI^2$
Puterea reactivă, $P_r = UI \sin \varphi$	$P_r = L\omega I^2$	$P_r = -\frac{1}{C\omega} I^2$	$P_r = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I^2$

Circuite paralel – mărimi caracteristice

Circuitul			
Admitanța, $Y = \frac{1}{Z}$	$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}$	$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}$	$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}$
Intensitatea (valoarea efectivă), I	$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}$	$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}$	$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}$
Defazajul, φ $\left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}\right)$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{L\omega}$	$\varphi = -RC\omega$	$\operatorname{tg} \varphi = R\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)$
Factorul de putere, $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$	$\cos \varphi = \frac{1}{R\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}}$	$\cos \varphi = \frac{1}{R\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}}$	$\cos \varphi = \frac{1}{R\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}}$
Puterea activă, $P = UI \cos \varphi$	$P = \frac{U^2}{R}$	$P = \frac{U^2}{R}$	$P = \frac{U^2}{R}$
Puterea reactivă, $P_r = UI \sin \varphi$	$P_r = \frac{U^2}{L\omega}$	$P_r = -U^2 C\omega$	$P_r = U^2 \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)$

2.1.9. Rezolvarea unor circuite RLC serie, RLC paralel*, rețele* întâlnite în practică

Aplicații recapitulative

1. Un circuit serie de curent alternativ este alcătuit dintr-un bec cu rezistența $R_b = 20 \, \Omega$ și o bobină, având rezistența R și inductanța L . Dacă se aplică circuitului tensiunea cu valoarea efectivă $U = 100 \, \text{V}$, având frecvența $\nu = 50 \, \text{Hz}$, tensiunea la bornele becului este $U_b = 50 \, \text{V}$, iar la bornele bobinei este $U_L = 70 \, \text{V}$. Să se determine:

- a) intensitatea curentului în circuit;
- b) rezistența bobinei;
- c) inductanța bobinei;
- d) puterile din bec și din bobină;
- e) factorul de putere al circuitului și puterile activă, reactivă și aparentă din circuit.

Soluție:

În schema circuitului din figura 2.36, a, becul este reprezentat prin rezistorul R_b , iar bobina prin rezistorul R și bobina ideală L (desenată ca dreptunghi alungit și înnegrit).

a) Din $U_b = R_b i$, rezultă intensitatea efectivă a curentului prin circuit:

$$I = \frac{U_b}{R_b} = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ A.}$$

b) Diagrama fazorială a tensiunilor din circuit este dată în figura 2.36, b. Impedanța circuitului este $Z = U / I = 100 / 2,5 = 40 \Omega$, iar impedanța bobinei $Z_L = U'_L / I = 70 / 2,5 = 28 \Omega$.

Pentru triunghiul ADC din diagrama fazorială se poate scrie:

$$U^2 = (U_b + U_R)^2 + (U'_L)^2, \text{ iar pentru triunghiul BDC, } U_L^2 = U_R^2 + (U'_L)^2.$$

Prin eliminarea lui $(U'_L)^2$ din ultimele două relații, se obține:

$$U_R = \frac{U^2 - U_b^2 - U_L^2}{2U_b} \text{ sau } IR = \frac{I^2(Z^2 - R_b^2 - Z_L^2)}{2IR_b},$$

de unde, prin simplificare:

$$R = \frac{Z^2 - R_b^2 - Z_L^2}{2R_b} = \frac{40^2 - 20^2 - 28^2}{2 \cdot 20} = 10,4 \Omega.$$

c) Din triunghiul BDC rezultă impedanța bobinei;

$$Z_L^2 = X_L^2 + R^2 = L^2 \omega^2 + R^2,$$

$$\text{de unde: } L = \sqrt{\frac{Z_L^2 - R^2}{\omega^2}} = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{28^2 - (10,4)^2} \approx 0,082 \text{ H} = 82 \text{ mH.}$$

d) Puterea activă disipată în bec este $P_b = R_b \cdot I^2 = 20 \cdot 2,5^2 = 125 \text{ W}$. Puterea activă disipată în bobină este $P_R = U_R \cdot I = RI^2$; $P_R = RI^2 = 65 \text{ W}$. Puterea reactivă a bobinei, de fapt a circuitului serie, este $P_r = U'_L I = U_L I \sin \phi'$.

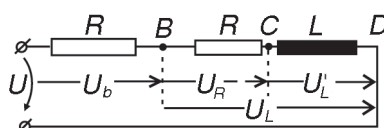
Dar $\sin \phi' = X_L / Z_L = 2\pi\nu L / Z_L = 100\pi \cdot 0,082 / 28 = 0,92$, deci:

$$P_r = 70 \cdot 2,5 \cdot 0,92 = 161 \text{ var.}$$

Puterea aparentă pentru bobină este $S = U_L \cdot I = 70 \cdot 2,5 = 175 \text{ VA}$.

e) Factorul de putere al circuitului se calculează din triunghiul ADC:

$$\cos \phi = \frac{U_b + U_R}{U} = \frac{R_b + R}{Z} = \frac{20 + 10,4}{40} = 0,76.$$



a)

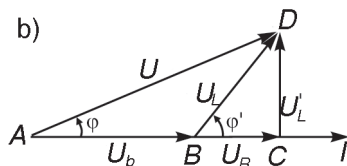


Fig. 2.36

a – Schema circuitului.
b – Diagrama fazorială.

Puterile din circuit sunt:

$$P = UI \cos \varphi = 100 \cdot 2,5 \cdot 0,76 = 190 \text{ W};$$

$$P_r = UI \sin \varphi = U'_L I = U_L I \sin \varphi' = X_L I^2 = 161 \text{ var};$$

$$S = UI = 100 \cdot 2,5 = 250 \text{ VA}.$$

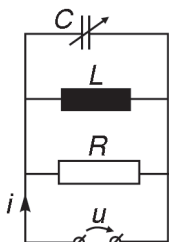


Fig. 2.37

2. Un circuit paralel este format dintr-un rezistor de rezistență $R = 1 \text{ k}\Omega$, o bobină cu inductanța $L = 25 \mu\text{H}$ și un condensator variabil (fig. 2.37). Circuitul este alimentat de la un generator de curent alternativ de frecvență fixă ($\nu = 1 \text{ MHz}$), care debitează – indiferent de impedanța circuitului exterior – un curent de intensitate efectivă $I = 50 \text{ mA}$. Să se determine:

- a) capacitatea condensatorului variabil, C_a , pentru care se realizează rezonanța curenților și puterea activă disipată în circuit în acest caz;
- b) raportul $(C_2 - C_1)/C_a$, unde C_1 și C_2 sunt capacitățile condensatorului variabil, pentru care puterea scade la jumătate din valoarea ce corespunde rezonanței.

Soluție:

a) $C_a = \frac{1}{L\omega^2} \approx 0,01 \text{ nF}.$

Circuitul fiind la rezonanță, $I_L = I_C$, puterea disipată pe rezistorul R este maximă: $P_{\text{rez}} = U \cdot I = I^2 R = 2,5 \text{ W}.$

b) $P = \frac{1}{2} P_{\text{rez}}; P = U \cdot I \cos \varphi = U \cdot I_R = R \cdot I_R^2.$

Ținând cont de relația dintre expresiile celor două puteri, obținem:

$$I_R^2 = \frac{I^2}{2} \Rightarrow I^2 = 2I_R^2.$$

Dar: $I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2.$

Deci: $I_R = \pm(I_L - I_C)$ sau $\frac{U}{R} = \pm \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) U;$

de aici se obține: $C_{1,2} = \frac{1}{\omega^2 L} \pm \frac{1}{\omega R}.$

Rezultă: $\frac{C_2 - C_1}{C_a} = \frac{2L\omega}{R} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^6}{10^2} = 0,314.$

3. Instalația electrică a unei fabrici absoarbe pentru instalația de iluminat puterea $P_1 = 20 \text{ kW}$ (instalația de iluminat se consideră rezistivă), iar pentru instalația de forță, puterea $P_2 = 200 \text{ kW}$, la un $\cos \varphi_2 = 0,8$. Instalația primește energia printr-o linie de racord de lungime $l = 1000 \text{ m}$, conductoarele liniei având rezistența pe unitate de lungime $R' = 10^{-2} \Omega/\text{km}$. Tensiunea efectivă la bornele

instalației este $U = 380$ V. Să se calculeze pierderea de putere pe linia de racord.

Soluție:

Pierderea de putere pe linia de racord, cu $R_l = R' \cdot 2l$ este:

$$\Delta P = R_l I^2 = \frac{R_l S^2}{U^2} = R_l \frac{P^2 + P_r^2}{U^2}, \text{ unde (fig. 2.35)}$$

$$P_r = P_2 \tan \varphi_2 = 200 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,6}{0,8} = 150 \cdot 10^3 \text{ var.}$$

$$P = P_1 + P_2 = 220 \cdot 10^3 \text{ W}; R_l = R' \cdot 2l = 2 \cdot 10^{-2} \Omega.$$

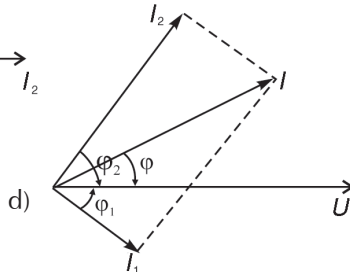
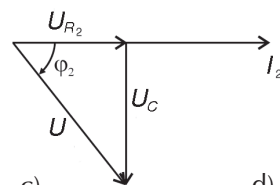
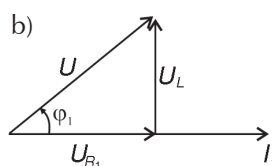
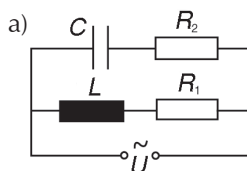
$$\text{Rezultă: } \Delta P = 2 \cdot 10^{-2} \frac{220^2 + 150^2}{380^2} 10^6 = 9819,94 \text{ W.}$$

• Prin rezolvarea acestei probleme se explică de ce pierderile de putere pe liniile de alimentare cu energie electrică pot fi cu atât mai mici cu cât P_r este mai mic și U mai mare. De aceea este necesară îmbunătățirea factorului de putere $\cos \varphi$ (la $\cos \varphi_2 = 1$, $\varphi_2 = 0$ și $P_r = 0$), iar pentru transmisia energiei în regim electric alternativ – folosirea transformatoarelor electrice.

4. Pentru circuitul din figura 2.38, a, se cunosc următoarele mărimi: $U = 60$ V, $R_1 = 8 \Omega$, $X_L = 6 \Omega$, $X_C = 4 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$. Să se determine:

a) intensitatea curentului din fiecare latură a circuitului, precum și puterile active și reactive corespunzătoare;

b) expresia frecvenței de rezonanță.



Soluție:

a) Din diagrama fazorială a laturii inductive ($\varphi_1 > 0$) (fig. 2.38, b), se obțin:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = 10 \Omega,$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = 6 \text{ A}, \cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = 0,8, \sin \varphi_1 = \frac{X_L}{Z_1} = 0,6,$$

$$\varphi_1 = 30^\circ 57' 11''; P_1 = UI_1 \cos \varphi_1 = 288 \text{ W}; P_r = UI_1 \sin \varphi_1 = 216 \text{ var.}$$

Din reprezentarea fazorială a laturii capacitive ($\varphi_2 < 0$) (fig. 2.38, c), se obțin:

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = 5 \Omega, I_2 = \frac{U}{Z_2} = 12 \text{ A}, \cos \varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = 0,6, \sin \varphi_2 = \frac{-X_C}{Z_2} = -0,8.$$

Fig. 2.38

$$P_2 = UI_2 \cos \varphi_2 = 432 \text{ W}; P_r = UI_2 \sin \varphi_2 = -576 \text{ var.}$$

Din diagramele fazoriale de laturi reunite se obține diagrama fazorială a întregului circuit (fig. 2.38, d) și relațiile pentru componenta activă ($I \cos \varphi$) și componenta reactivă ($I \sin \varphi$) a intensității curentului total:

$$I \cos \varphi = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2; I \sin \varphi = I_2 \sin \varphi_2 - I_1 \sin \varphi_1,$$

relații care permit obținerea următoarelor valori:

$$I = 13,4 \text{ A}; \cos \varphi = 0,89; \sin \varphi = -0,45; \varphi = 26^\circ 44' 37''; P = UI \cos \varphi = 720 \text{ W};$$

$$P_r = UI \sin \varphi = -360 \text{ var.}$$

b) Condiția de rezonanță impune $\varphi = 0$, adică anularea componentei reactive a intensității curentului total, $I \sin \varphi$:

$$I_1 \sin \varphi_1 = I_2 \sin \varphi_2,$$

$$\frac{U}{\sqrt{R_1^2 + L^2 \omega^2}} \frac{L\omega}{\sqrt{R_1^2 + L^2 \omega^2}} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} \frac{\frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R_2^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}}, \quad \omega^2 LC (R_2^2 C - L) = R_1^2 C - L;$$

$$\text{se obține, în final: } v_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}.$$

Expresia pentru v_0 arată că, pentru circuitul considerat, frecvența de rezonanță depinde și de rezistențele R_1 și R_2 din circuit, spre deosebire de frecvența de rezonanță pentru circuitele ideale RLC serie sau paralel

$$\left(v_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \right), \text{ care depindea numai de parametrii } L \text{ și } C.$$

Observații

1) Când rezistențele R_1 și R_2 sunt egale sau nule, frecvența de rezonanță este egală cu frecvența de rezonanță ideală $\left(v_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \right)$.

2) Dacă $R_1^2 > \frac{L}{C}$ și $R_2^2 < \frac{L}{C}$, sau viceversa, rezultă o frecvență de rezonanță imaginară: circuitul nu va fi rezonant pentru nicio frecvență a tensiunii aplicate circuitului.

3) În cazul particular $R_1^2 = R_2^2 = \frac{L}{C}$ rezultă o nedeterminare pentru frecvența de rezonanță: circuitul este rezonant pentru orice frecvență. Acest circuit, care se numește complet aperiodic, este utilizat în măsurări electrice.

Test de evaluare

2

1. Pentru un circuit serie RLC : $U = 10 \text{ V}$, $I = 1 \text{ A}$, $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$. Care este valoarea rezistenței rezistorului din circuit?
a) $2,5 \Omega$; b) 5Ω ; c) 1Ω .
2. Să se completeze spațiile libere din enunțul următor cu adjectivele *mare* sau *mic*: circuitul serie format dintr-o bobină ideală și un condensator ideal este echivalent cu o bobină sau cu un condensator, tot ideale, după cum produsul $\omega^2 LC$ este mai ... sau mai ... decât 1. Realizați același exercițiu pentru un circuit paralel.
3. Un circuit serie RLC este caracterizat prin mărimile: $U = 10 \text{ V}$, $\nu = 50 \text{ Hz}$, $I = 50 \text{ mA}$, $U_C = 12 \text{ V}$, $L = \frac{3,4}{\pi} \text{ H}$. Care este defazajul circuitului, φ ?
a) 45° ; b) 30° ; c) 60° .
4. Pot apărea supratensiuni numai în circuitele în care:
a) $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} < R$; b) $\sqrt{\frac{L}{C}} > R$; c) $\sqrt{\frac{L}{C}} \leq R$.
Supracurenți apar în circuitele pentru care există inegalitatea:
a) $C\omega_0 = \frac{1}{L\omega_0} < \frac{1}{R}$; b) $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} > R$; c) $\frac{1}{C\omega_0} = L\omega_0 < R$.
5. În care dintre regimurile enumerate la problema rezolvată 4 funcționează circuitul analizat?
a) 1; b) 2; c) 3.

Notă: În ordinea numărului de răspunsuri bune, aprecierea este de „foarte bine” pentru cele cinci răspunsuri corecte, „bine” pentru patru răspunsuri corecte ș.a.m.d.

Probleme propuse

1. Să se explice din punct de vedere electronic de ce condensatorul întrerupe circuitul de curent continuu și îl închide pe cel de curent alternativ.
2. Frecvența industrială pentru tensiunea alternativă este o frecvență standardizată. Care este valoarea acesteia?

3. Pentru circuitele de curent alternativ rezistorul are același efect ca în curent continuu: absoarbe energie electrică, pe care o transformă în căldură. Acest enunț este adevărat sau fals?
4. Într-un circuit de curent alternativ, care conține doar un rezistor, la frecvențe joase, u și i trec sau nu trec simultan prin valori nule?
5. De ce folosim osciloscopul electronic în studiul circuitelor de curent alternativ?
6. Cum se scrie legea lui Ohm în mărimi instantanee pentru un circuit serie RLC ? Dar în mărimi efective?
7. Pentru un circuit serie RLC , în regim de rezonanță, intensitatea efectivă are valoare maximă, minimă, zero sau constantă în timp? Dar pentru un circuit paralel RLC ideal?
8. Variind frecvența tensiunii u spre zero, spre ce valoare va tinde defazajul circuitului serie RLC ?
9. Folosind câte două dintre notațiile R , U , $\cos\varphi$ și I să se scrie două relații pentru impedanța Z a unui circuit serie RLC .
10. Folosind simbolurile $\frac{U_m}{\sqrt{2}}$, I , T , $\cos\varphi$, să se scrie expresia pentru energia W pe care o absoarbe un circuit de curent alternativ în timp de o perioadă.
11. Ce mărime reprezintă produsul $Q \cdot R$ pentru circuitele de curent alternativ RLC ? Dar câtul $\frac{Q}{R}$?
12. Care este impedanța, Z , pentru frecvența $\nu = 1$ kHz a tensiunii aplicate unui reostat cu rezistența $R = 100 \Omega$, $N = 2000$ spire, lungimea $l = 50$ cm și aria unei spire $S = 15$ cm²? Inductanța unei bobine este $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$.
R: 137,7 Ω .
13. Un generator cu tensiunea $U = 10$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz alimentează un circuit RLC serie, prin care circulă un curent $I = 50$ mA. Tensiunea la bornele condensatorului este $U_C = 12$ V, iar inductanța bobinei, $L = \frac{3,4}{\pi}$ H. Să se calculeze defazajul circuitului φ și raportul $\frac{S}{P_r}$.
R: 30°; 2.

14. Impedanța unui circuit serie RLC este $Z = 1000 \, \Omega$ pentru un defazaj $\varphi = 60^\circ$, iar factorul de supratensiune, $Q = 2$. Frecvența de rezonanță a circuitului este $\nu_0 = 100 \, \text{Hz}$. Să se calculeze capacitatea condensatorului C .

R: $62,83 \, \mu\text{F}$.

15. Dacă se aplică la bornele unei bobine o tensiune sinusoidală de frecvență standard ($\nu = 50 \, \text{Hz}$) și tensiune efectivă $U = 60 \, \text{V}$, intensitatea efectivă a curentului prin bobină este $I = 4 \, \text{A}$, iar dacă se aplică la bornele bobinei o tensiune continuă $U_0 = 10 \, \text{V}$, intensitatea curentului este $I_0 = 2 \, \text{A}$. Să se determine inductanța L și defazajul φ al circuitului de curent alternativ.

R: $45 \, \text{mH}$; $70^\circ 30' 47''$.

16. La bornele unei surse cu tensiunea $U = 22,36 \, \text{V}$ și frecvența $\nu = 50 \, \text{Hz}$ se conectează circuitul serie format dintr-o bobină și un rezistor de rezistență $R = 5 \, \Omega$. Cunoscând că tensiunea la bornele bobinei este $U_b = 10\sqrt{2} \, \text{V}$, iar tensiunea la bornele rezistorului este $U_R = 10 \, \text{V}$, să se calculeze rezistența R_1 , inductanța L și defazajul circuitului (φ).

R: $10 \, \Omega$; $15,9 \, \text{mH}$; $26^\circ 37' 11''$.

17. Un circuit serie cu $R = 1 \, \text{k}\Omega$, $L = 0,4 \, \text{H}$, $C = 0,2 \, \mu\text{F}$ este alimentat de la un generator de tensiune alternativă, a cărei frecvență poate fi variată.

a) Pentru ce valori ale frecvenței puterea activă devine egală cu puterea reactivă?

b) Care sunt regimurile reactive ale circuitului, corespunzătoare frecvențelor calculate?

18. Voltmetrele cu rezistență internă foarte mare din montajul din figura 2.39 indică tensiunile efective $U = 149 \, \text{V}$, $U_1 = 50 \, \text{V}$ și $U_2 = 121 \, \text{V}$, frecvența tensiunii sinusoidale fiind $\nu = 50 \, \text{Hz}$. Cunoscând că $R_1 = 5 \, \Omega$, să se calculeze rezistența R și inductanța L a bobinei.

R: $5,06 \, \Omega$; $34,9 \, \text{mH}$.

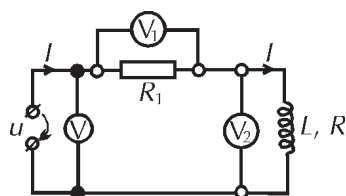


Fig. 2.39

Montaj pentru determinarea rezistenței și inductanței unei bobine.

19. O instalație de curent alternativ, funcționând sub tensiunea de $220 \, \text{V}$, absoarbe o putere activă de $2 \, \text{kW}$, sub un factor de putere $0,8$ inductiv. Se cer:

- rezistența instalației;
- reactanța instalației;
- puterea reactivă absorbită;
- puterea aparentă.

- 20.** Se aplică tensiunea U unui circuit serie de curent alternativ format din elementele bobină și condensator. Impedanțele celor două elemente sunt egale. Defazajul dintre tensiunea U_b la bornele bobinei și intensitatea curentului I din circuit este $\varphi_b = 30^\circ$. Să se determine relația dintre tensiunile U , U_b și U_C și defazajul φ al circuitului.
R: -30° ; $U_b = U_C = U$.
- 21.** Un circuit serie RLC are rezistența $R = 4 \, \Omega$ și inductanța $L = 2 \, \text{H}$. Tensiunea sursei de alimentare este $U = 220 \, \text{V}$, cu frecvența $\nu = 50 \, \text{Hz}$. Ce valoare trebuie să aibă capacitatea C_0 a condensatorului pentru ca circuitul de curent alternativ să prezinte fenomenul de rezonanță și care este valoarea maximă a supratensiunii U_C la bornele condensatorului?
R: $5 \, \mu\text{F}$; $49395 \, \text{V}$.
- 22.** Un circuit RLC serie ideal are următoarele tensiuni efective: la bornele rezistorului $100 \, \text{V}$, la bornele condensatorului $200 \, \text{V}$, iar la bornele bobinei $150 \, \text{V}$. Puterea disipată în circuit este de $150 \, \text{W}$.
 a) Care este intensitatea efectivă a curentului prin circuit?
 b) Care este factorul de putere al circuitului?
 c) Care este reactanța inductivă a circuitului?
R: $1,5 \, \text{A}$; $0,894$; $100 \, \Omega$.
- 23.** O bobină are rezistența de $20 \, \Omega$. Să se calculeze inductanța bobinei cunoscând că defazajul circuitului este de 30° și frecvența tensiunii aplicate este de $50 \, \text{Hz}$.
R: $L = 36,78 \, \text{mH}$.
- 24.** O bobină și un condensator legate în serie sunt alimentate de la o sursă cu tensiune efectivă de $60 \, \text{V}$, intensitatea efectivă a curentului fiind de $0,5 \, \text{A}$. Defazajul dintre intensitatea curentului și tensiunea la borne este de $\frac{\pi}{4}$ rad, iar cel dintre intensitate și tensiunea la bornele bobinei este de $\frac{\pi}{3}$ rad. Să se calculeze valorile parametrilor electrici ai bobinei, R și Z .
R: $84,85 \, \Omega$; $146,96 \, \Omega$.
- 25.** De la o rețea de alimentare de $220 \, \text{V}$ și frecvența $50 \, \text{Hz}$, o bobină cu factorul de putere $0,6$ absoarbe $750 \, \text{W}$. Să se afle:
 a) inductanța bobinei;
 b) capacitatea condensatorului care trebuie montat în serie pentru a se obține un factor de putere egal cu unitatea;
 c) puterea absorbită în acest caz de la rețea.
R: $98,7 \, \text{mH}$; $102,8 \, \mu\text{F}$; $2081,72 \, \text{W}$.

26.

În figura alăturată este reprezentată variația intensității unui curent în funcție de pulsația ω , după relația:

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right)^2}.$$

Să se treacă în dreptul săgeților simbolurile intensităților efective ale curenților din elementele reactive ale circuitului.

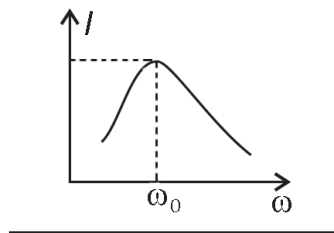


Fig. 2.40

27.

Un circuit paralel (fig. 2.37), format dintr-un condensator variabil, o bobină ideală de inductanță $100 \mu\text{H}$ și un rezistor de rezistență 10Ω , este alimentat de un generator de curent alternativ cu frecvența de 10 kHz , asigurând o valoare efectivă constantă de 20 mA a intensității totale a curentului. Să se deducă:

- valoarea maximă a puterii disipate în rezistor;
- capacitatea condensatorului pentru care puterea disipată în rezistor este maximă;
- capacitățile C_1 și C_2 ale condensatorului variabil, pentru care puterea disipată în rezistor este egală cu jumătate din puterea maximă;
- defazajul circuitului, ϕ .

R: a) 4 mW ; b) $2,53 \mu\text{F}$; c) $0,94 \mu\text{F}$; $4,12 \mu\text{F}$; d) $\pm 45^\circ$.

28.

Pentru evitarea pierderilor de putere în rețelele publice de iluminat fluorescent este indicată montarea, în paralel, a unui condensator la fiecare tub fluorescent. Un tub fluorescent, caracterizat prin valorile nominale $U = 220 \text{ V}$, $P = 40 \text{ W}$, $\nu = 50 \text{ Hz}$, funcționează la un factor de putere inductiv $\cos \phi = 0,6$.

- Ce valori poate avea capacitatea condensatorului montat în paralel cu tubul fluorescent pentru a forma un circuit care să absoarbă de la rețea aceeași putere P la un factor de putere $\cos \phi = 0,95$?

- Care este raportul pierderilor de putere pe linia de alimentare înainte și după conectarea condensatorului?

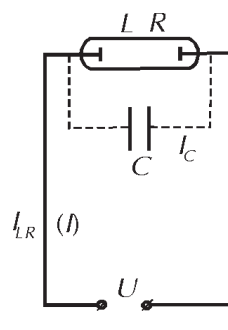


Fig. 2.41

R: $2,6 \mu\text{F}$ și $4,3 \mu\text{F}$; $2,5$.

29.

În circuitul din figura 2.42 se cunosc $R = 100 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ și $\nu = 2 \text{ kHz}$.

- Să se calculeze valoarea capacității C_1 a condensatorului variabil, astfel încât valoarea

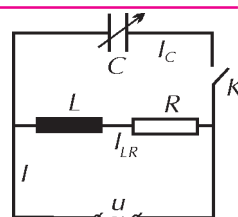


Fig. 2.42

30.

efectivă a intensității curentului prin latura principală să nu se modifice prin închiderea întrerupătorului K.

b) Să se determine defazajul între intensitatea curentului prin latura principală și tensiunea la bornele circuitului atunci când capacitatea condensatorului devine $C_2 = 1/2C_1$. (Olimpiada de fizică, etapa județeană, anul 1994).

R: 0,197 μF ; $7^\circ 6' 39''$.

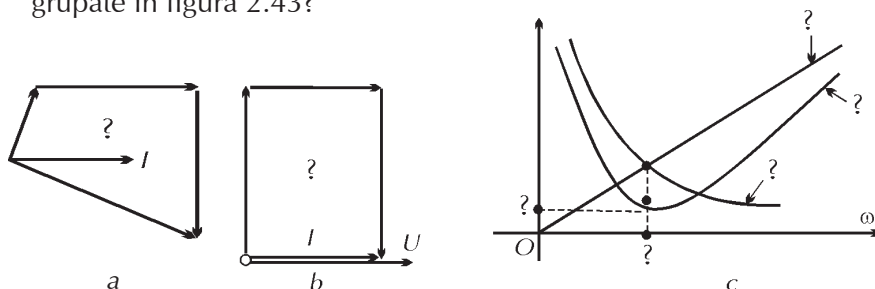


Fig. 2.43

2.1.11. Măsurile de protecție a propriei persoane și a mediului înconjurător în utilizarea curentului electric alternativ

2.1.11.1. Evitarea pericolului de electrocutare

Prin *electrocutare* se înțelege străbaterea unui organism viu de către un curent electric de intensitate capabilă să-i provoace acestuia o vătămare sau chiar moartea.

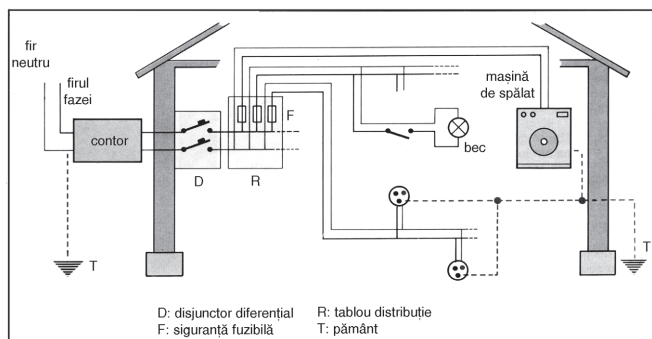
Pentru corpul omenesc, pragul letal pentru intensitatea de curent este de 50 mA. Pentru a calcula tensiunea de prag pentru situația cea mai defavorabilă, se consideră rezistența $R = 1000 \Omega$ (piele umedă) și $I = 50 \text{ mA}$, de unde rezultă, aplicând legea lui Ohm, $U = IR = 50 \text{ V}$.

Din motive de securitate, pragul de tensiune critică a fost stabilit la 25 V. Pentru medii uscate se admite tensiunea de prag de 50 V. Contează și durata trecerii curentului prin corp. Un contact la 220 V timp de o zecime de secundă nu primejduiește, în cele mai multe cazuri, viața omului. Frecvențele cele mai periculoase sunt cuprinse în intervalul 40–60 Hz.

Pentru evitarea apariției unor tensiuni mai mari decât cele permise, prin folosirea rețelei de alimentare electrică se introduce în rețeaua de apartament firul de împământare, legat la borna nepereche a prizelor de tensiune. În felul acesta, carcasa aparatelor capătă potențial considerat de referință, adică zero. Corpul omului fiind la același potențial, nu pot apărea prin aparate, la acționarea acestora, așa-numiții „curenți de fugă” sau „curenți de defect”, care pot avea intensități de electrocutare.

În figura 2.44 este prezentată schematic rețeaua de alimentare electrică a unei locuințe.

Fig. 2.44



Disjunctorul diferențial (DD) este un aparat (fig. 2.45) care poate întrerupe curentul într-o rețea de alimentare electrică pentru următoarele situații impuse:

- atunci când intensitatea curentului, *pe linia principală*, depășește valoarea maximă fixată de utilizator (valoare cuprinsă între 15 A și 75 A);
- atunci când există o *diferență minimă* de 650 mA între intensitatea curentului în *firele de fază* (I_f) și intensitatea curentului în *firul neutru* (I_N) *din linia principală*;
- atunci când utilizatorul apasă pe butonul „deschis” în scopul efectuării unei intervenții la rețeaua electrică protejată de DD.

În școlile din Franța (fig. 2.46) DD decuplează la diferența minimă de 30 mA, pentru evitarea electrocutării elevilor. (Diferența minimă între intensități este egală cu intensitatea I_f a curentului de fugă la pământ prin corpul persoanei electrocutate, $I_f = I_F - I_N$.)

Disjunctorul conține și o casetă cu siguranțe fuzibile, *intercalate în fiecare dintre firele de fază*, pentru evitarea cazurilor de scurtcircuit generatoare de incendii. DD este folosit și în țara noastră, mai ales în cazul căzii de baie tip jacuzzi.

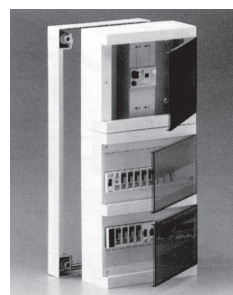


Fig. 2.45

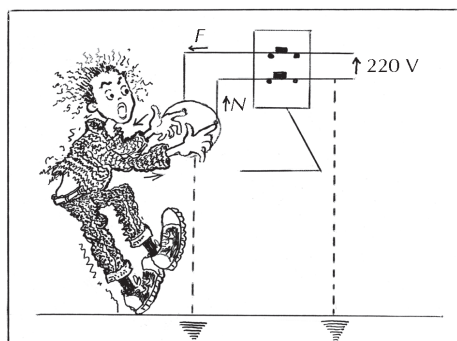


Fig. 2.46

De reținut!

– Siguranțele fuzibile protejează, deci, instalațiile electrice de supra-intensități ale curentului electric.

– Disjunctorul diferențial permite protejarea individului de pericolul electrocutării.

În figura 2.47 este ilustrat pericolul de electrocutare datorat contactului accidental dintre firul fază (întâmplător desizolat în punctul P) și carcasa metalică (punctul P) a unei mașini de

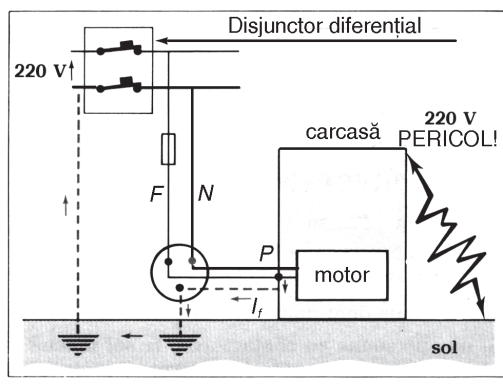


Fig. 2.47

spălat. Intensitatea curentului fiind inferioară în firul neutru ($I_N < I_P$), disjunctorul diferențial acționează pentru întreruperea curentului în linia principală.

În grupajul de desene prezentat în figura 2.48 sunt arătate pericolele de electrocutare care pot apărea prin folosirea necorespunzătoare a unor aparate, unelte și dispozitive electrice de uz casnic.



Fig. 2.48

Pericole de electrocutare!

2.1.11.2. Măsurile tehnice care pot fi folosite pentru protecția împotriva electrocutării

- acoperirea cu materiale electroizolante a părților active ale instalațiilor și echipamentelor electrice (izolarea de protecție);
- scoaterea de sub tensiune a instalației sau echipamentului electric la care urmează a se efectua lucrări și verificarea lipsei de tensiune;
- utilizarea dispozitivelor speciale pentru legări la pământ;
- folosirea mijloacelor de protecție electroizolante;
- executarea intervențiilor la instalațiile electrice (depanări, reparări, racordări etc.) trebuie să se facă numai de personal calificat în meseria de electrician, autorizat și instruit pentru lucrul respectiv.

Tratamentul de urgență al accidentatului electrocutat (fig. 2.49)

1. Smulgerea din priză a cordonului de alimentare a aparatului electrocutant. (O întârziere de patru minute produce moartea cerebrală.)

2. Inspirația profundă a salvatorului concomitent cu forțarea expirației pentru victimă.

3. Insuflări de aer (12–15 pe minut) în plămâni prin nasul victimei, sau aplicarea procedeului „gură-la-gură”.

În altă ordine de idei pe temă electrică, o importantă acțiune ecologică este și colectarea aparaturii electrice stricate în vederea depunerii acestora în locuri special amenajate. Se elimină astfel pericolul de noxă; se poate realiza și acțiunea de reciclare de material electric.

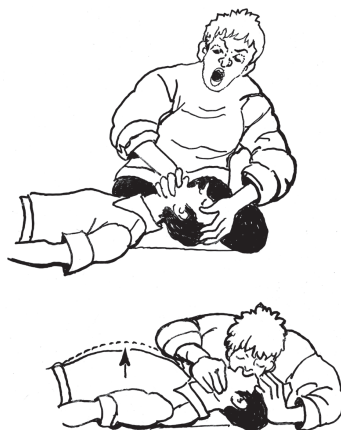


Fig. 2.49

2

2.2. Oscilații electromagnetice libere. Circuitul oscilant

2.2.1. Circuitul oscilant. Producerea oscilațiilor electromagnetice libere

Descărcarea unui condensator printr-un circuit serie cu bobină și rezistor se poate face aperiodic sau periodic.

Experiment

Cu ajutorul montajului din figura 2.50, se poate studia descărcarea condensatorului. Condensatorul este încărcat de la sursa de tensiune continuă (baterie, redresor), apoi este conectat în circuitul de descărcare prin aducerea comutatorului K_1 în poziția 2 și a comutatorului K_2 în poziția 1. Rezistența activă totală a circuitului este suma dintre rezistența rezistorului și rezistența sârmei spirelor bobinei: $R_t = R + r$.

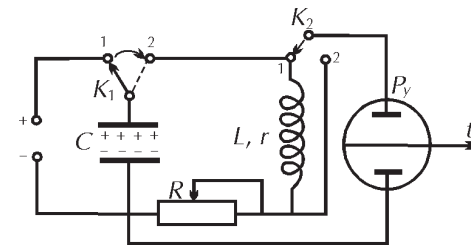


Fig. 2.50

Montaj pentru studii descărcării condensatorului prin circuitul oscilant.

a) Dacă

$$R_t \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.9)$$

curba variației în timp a tensiunii u_C la bornele condensatorului, după comutarea pe poziția 2, arată pe ecranul osciloscopului ca în figura 2.51, a. Descărcarea este **aperiodică**. Încărcând și apoi descărcând condensatorul cu osciloscopul conectat

la bornele rezistorului (K_2 în poziția 2), se obține curba variației în timp a intensității curentului prin circuit și a tensiunii $u_R = Ri$ de la bornele rezistorului (fig. 2.51, c).

Intensitatea curentului prin circuit crește la început de la zero până la o anumită valoare maximă, pentru ca apoi să scadă continuu până la zero (fig. 2.51, b). În intervalul de timp Δt , pentru care tensiunea u_C practic se anulează, are loc transformarea în căldură a energiei acumulate inițial în câmpul electric al condensatorului. T.e.m. de autoinducție, care apare odată cu descreșterea intensității curentului de descărcare prin bobină este insuficientă pentru a produce încărcarea condensatorului în sens contrar. După

cum rezultă din relația (2.9), în descărcarea aperiodică $L < \frac{R^2 C}{4}$.

b) Dacă rezistența totală devine mai mică decât dublul impedenței caracteristice a circuitului, adică

$$R_t < 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

descărcarea condensatorului este *periodică*. Tensiunea la bornele condensatorului u_C și intensitatea curentului i prin circuit păstrează caracteristica unei oscilații armonice amortizate în timp (fig. 2.51, c). Oscilațiile lui u_C și i se produc singure, fără acțiunea unei t.e.m. alternative sinusoidale exterioare, numai datorită excitației inițiale realizate prin încărcarea condensatorului. Oscilațiile de acest fel se numesc *oscilații electromagnetice libere*; cu cât rezistența circuitului este mai mică, cu atât amortizarea oscilațiilor este mai mică (fig. 2.51, a și b).

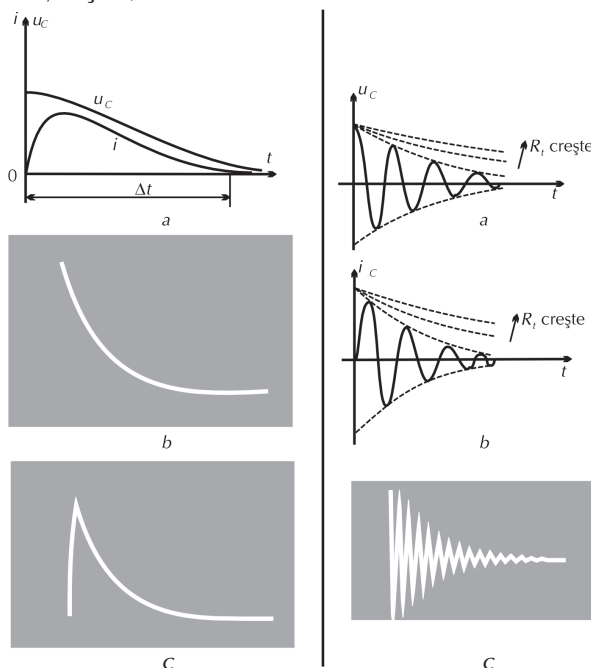


Fig. 2.51

Descărcarea aperiodică.

Fig. 2.52

Oscilații amortizate.

Definiție

Circuitul închis format dintr-un condensator de capacitate C și o bobină de inductanță L și rezistență r în care se pot produce oscilații electromagnetice libere, se numește *circuit oscilant*.

2.2.2. Studiul calitativ al oscilațiilor libere într-un circuit RLC

Procesul de descărcare a condensatorului și de producere a oscilațiilor în circuit poate fi urmărit pe graficul din figura 2.53, care arată variația tensiunii u_C la bornele condensatorului și a intensității curentului în bobină, rezistența sârmei bobinei fiind considerată neglijabilă.

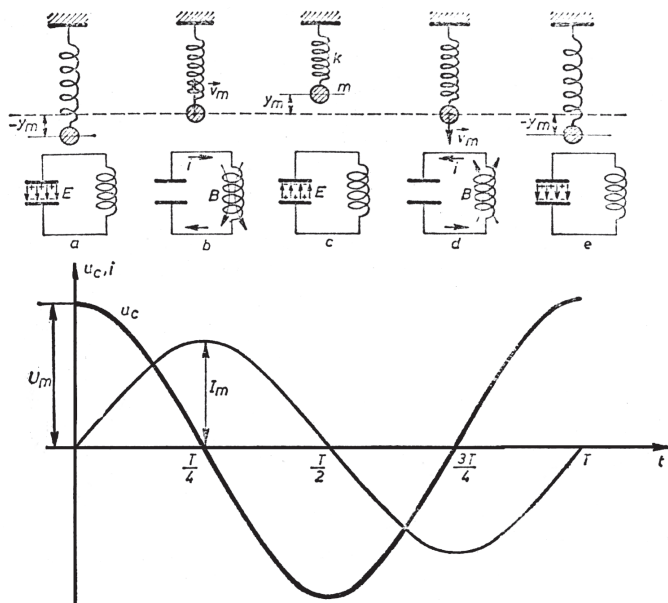


Fig. 2.53

Schimbul de energie între condensator și bobină la circuitul oscilant ideal. Analogia cu sistemul oscilant mecanic (pendulul elastic ideal).

Circuitul oscilant este analog cu un pendul elastic. La momentul inițial $t = 0$, tensiunea u_C între armăturile condensatorului are valoarea maximă $u_C = U_m$, iar energia circuitului oscilant este egală cu energia câmpului electric dintre armăturile condensatorului. Sarcina de pe armături este $q_m = CU_m$; situația analogă a pendulului este poziția de deformare maximă $-y_m$ (fig. 2.53, a). Odată cu începerea descărcării, prin bobină circulă un curent care crește treptat în intensitate. T.e.m. de inducție care ia naștere în bobină împiedică o creștere rapidă a intensității curentului. Pe măsură ce crește intensitatea curentului, tensiunea u_C scade, deoarece un număr tot mai mare de electroni pleacă de la armătura încărcată negativ și același număr de electroni trece la armătura pozitivă, micșorându-i sarcina. Sensul mișcării electronilor este contrar sensului curentului electric. La momentul $t = T/4$, condensatorul este complet descărcat, $u_C = 0$, intensitatea curentului este maximă, $i = I_m$, iar energia circuitului este egală cu energia câmpului magnetic din bobină, $\frac{1}{2}LI_m^2$.

La același moment ($t = T/4$), energia pendulului elastic este egală cu energia cinetică $\frac{1}{2}mv_m^2$ (fig. 2.53, *b*) – pendulul trece prin poziția de echilibru ($y = 0$).

În intervalul ($T/4, T/2$) energia cinetică a pendulului se transformă în energie potențială. Viteza bilei variază repede când $v \rightarrow 0$ și, în același timp, accelerația $\frac{dv}{dt}$ crește, deci și forța de inerție $m\frac{dv}{dt}$ crește. Forța de inerție deformează puternic resortul, deviația fiind maximă, dar în sens opus celei de la $t = 0$, adică egală cu y_m . Analog, în circuitul electric oscilant, după ce intensitatea curentului a trecut prin valoarea maximă scade, tinzând către zero. Dar la acest moment ($t = T/4$) viteza de variație a intensității curentului, $\frac{di}{dt}$, este

maximă, deci și t.e.m. de autoinducție, $-L\frac{di}{dt}$, care este de același sens cu sensul curentul. În intervalul de timp ($T/4, T/2$), bobina se comportă ca un generator și încarcă în sens invers condensatorul. La $t = T/2$, tensiunea atinge valoarea extremă negativă $u_c = -U_m$ (fig. 2.53, *c*). În continuare, fenomenele se succed în aceeași ordine ca în intervalul ($0, T/2$), dar în sens contrar. Începând din momentul $t = T/2$, condensatorul se descarcă, trecând din starea (*c*) în starea (*d*), tensiunea u_c scade, iar intensitatea curentului crește. În orice moment din intervalul ($T/2, 3T/4$) energia circuitului oscilant este egală cu suma dintre energia câmpului electric și cea a câmpului magnetic.

La $t = 3T/4$ curentul va avea aceeași intensitate maximă, dar de sens contrar, $i = -I_m$, întocmai ca bila legată de resort care atinge viteza maximă v_m . Energia circuitului oscilant este egală cu cea a câmpului magnetic din bobină:

$\frac{1}{2}LI_m^2$ (fig. 2.53, *d*). Urmează apoi, în intervalul ($3T/4, T$) reîncărcarea condensatorului de către t.e.m. autoindusă în bobină și se ajunge la situația inițială a condensatorului încărcat, $u_c = U_m$, iar deformarea pendulului elastic corespunde deviației maxime $-y_m$. Ambele sisteme oscilante au ajuns în stare inițială după o perioadă. Apoi procesul oscilatoriu reîncepe.

Graficele din figura. 2.53 arată că maximul intensității curentului (sau al energiei câmpului magnetic) coincide în timp cu anularea tensiunii (sau a energiei câmpului electric) și viceversa, adică defazajul dintre tensiune și intensitatea curentului este egal cu un sfert de perioadă sau cu $\pi/2$ radiani. În primul și în al treilea sfert de perioadă, condensatorul are rolul unui generator de energie electrică, iar bobina are rolul unui receptor de energie; în al doilea și în al patrulea sfert de perioadă, bobina se comportă ca un generator, din cauza apariției t.e.m. de autoinducției, care se opune scăderii intensității curentului. Bobina cedează energie din câmpul său magnetic condensatorului, care are rolul unui receptor de energie.

Analogia pendul elastic–circuit oscilant oferă posibilitatea stabilirii următoarelor corespondențe între mărimile ce le caracterizează:

Mărimi mecanice	Mărimi electrice
Elongația, y	Sarcina, q
Viteza, $v = dy/dt$	Intensitatea curentului, $i = dq/dt$
Constanta elastică, k	Inversa capacității, $1/C$
Masa, m	Inductanța, L
Accelerația, $a = dv/dt$	Viteza de variație a intensității curentului, di/dt

Correspondența poate continua.

Legea conservării energiei pentru cele două sisteme analogic studiate are expresia:

– pentru pendulul elastic: $\frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2 = W_{\text{mec.}} = \text{const.}$

– pentru circuitul oscilant: $\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = W_{\text{elmag.}} = \text{const.}$

2.2.3. Perioada oscilațiilor electromagnetice libere

Oscilațiile electromagnetice dintr-un circuit oscilant sunt libere. Procesul oscilator se produce singur, datorită sarcinii inițiale, q_m , a condensatorului. Oscilațiile libere se produc cu o perioadă proprie, T_0 , care depinde numai de valorile capacității, C , și inductanței, L , a circuitului oscilant.

Pentru a găsi relația dintre perioada de oscilație, T_0 , capacitatea, C , și inductanța, L , ale unui circuit ideal, fără pierderi, se pleacă de la ecuația tensiunilor pentru un circuit RLC de curent alternativ, unde $U = 0$ și $R \approx 0$, bornele la care se aplică t.e.m. fiind în scurtcircuit.

Se obține $l\omega_0 L = l/\omega_0 C$, adică tensiunea la bornele bobinei este egală cu tensiunea dintre armăturile condensatorului, iar intensitatea efectivă a curentului prin bobină și prin condensator va fi aceeași, deoarece pentru curentul datorat oscilațiilor libere ale electronilor de conducție circuitul oscilant se prezintă ca un simplu circuit serie. Împărțind cu l se obține:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \text{ adică } X_L = X_C.$$

Regulă

În circuitul oscilant, reactanța inductivă X_L este întotdeauna egală cu reactanța capacitivă X_C .

În circuit se produc numai oscilații a căror pulsație este:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Perioada acestor oscilații libere ale circuitului oscilant va fi:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \text{ (formula lui Thomson)}$$

Perioada oscilațiilor, T_0 , se mai numește *perioada proprie* a circuitului oscilant.

Am regăsit formula lui Thomson, întâlnită la circuitele serie RLC de curent alternativ, la fenomenul de rezonanță, când pulsația tensiunii alternative aplicate circuitului serie era egală cu pulsația proprie, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Prin urmare, perioada proprie a oscilațiilor electromagnetice produse în circuitul oscilant depinde numai de valorile parametrilor circuitului oscilant, adică de capacitatea și de inductanța circuitului.

Observație fundamentală. În cele spuse până acum, nu s-au examinat rolul rezistenței circuitului oscilant și rolul frecării din sistemul mecanic. Datorită rezistenței sârmei bobinei și conexiunilor, în circuitul oscilant real are loc o pierdere de energie sub formă de căldură, care se transferă sistemelor înconjurătoare. La fel se întâmplă și în cazul sistemului mecanic. Sistemul se încălzește în timpul oscilațiilor datorită frecărilor. Amplitudinea inițială scade, deoarece scade energia oscilatorului prin disipare. Tot așa scad și amplitudinile lui u_C și i după fiecare oscilație.

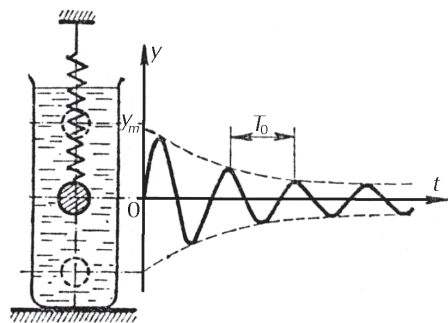


Fig. 2.54

Sistemul oscilator mecanic analog circuitului oscilant electric real.

Mișcarea oscilatorie liberă, fie electromagnetică, fie mecanică, este, în realitate, o mișcare amortizată.

Sistemul oscilator mecanic, analog circuitului oscilant real, este prezentat în figura 2.54.

Experiment. Studiul regimului periodic amortizat (regimul oscilațiilor libere amortizate) al unui circuit oscilant RLC .

Pentru vizualizarea pe ecranul osciloscopului catodic a oscilațiilor libere amortizate care apar într-un circuit oscilant RLC , alimentat cu impulsuri de tensiune, se va realiza montajul cu schema din figura 2.55.

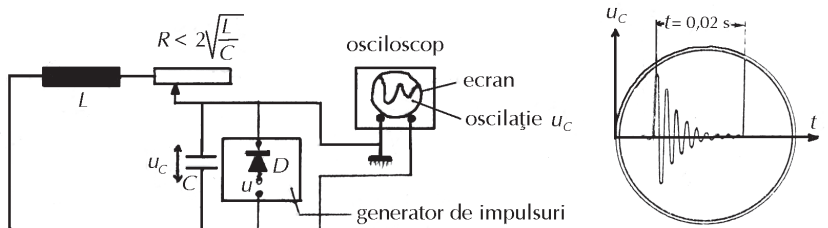


Fig. 2.55

Drept generator de impulsuri se poate folosi un generator de tensiune alternativă, $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ – cu frecvența ν , ce poate fi variată – în serie cu o

diodă semiconductoare. Impulsurile de tensiune vor fi monoalternanțele tensiunii alternative redresate.

În cazul în care condensatorul se încarcă prin impulsuri de tensiune a căror perioadă de repetiție este suficient de mare, astfel încât regimul tranzitoriu provocat de primul impuls să dispară până la apariția celui de-al doilea impuls, curba de descărcare a condensatorului, $u_C = f(t)$, poate fi repetată atâta timp cât se aplică impulsuri de tensiune condensatorului. Dacă se conectează armăturile condensatorului la plăcile de deviație verticală, Y , ale unui osciloscop catodic și se alege perioada tensiunii de baleiaj egală cu cea a impulsurilor de tensiune aplicate condensatorului pentru încărcarea sa periodică, pe ecranul osciloscopului va apărea o imagine permanentă, reprezentată în figura 2.56.

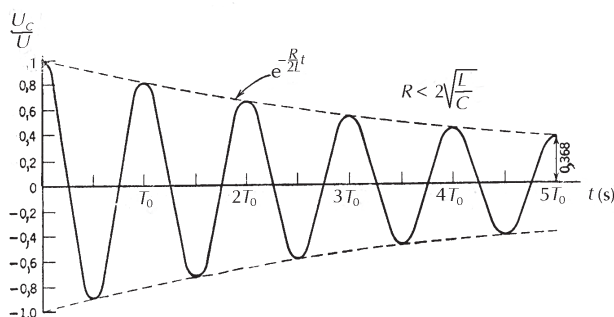


Fig. 2.56

Se disting trei clase de circuite, fiecare fiind caracterizată de un anumit tip de regim liber, după cum $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$:

regim liber oscilatoriu amortizat: $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$; regim aperiodic critic: $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$;

regim aperiodic: $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

A) **Regimul liber oscilatoriu amortizat:** $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Circuitul admite oscilații proprii pentru u_C și i cu pulsația:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Aceste oscilații reprezintă oscilații amortizate, cu factorul exponențial de amortizare $e^{-\frac{R}{2L}t}$, numite *oscilații pseudoperiodice*.

- Pentru $L = 1 \text{ H}$, $C = 0,2 \text{ }\mu\text{F}$, $R = 200 \text{ }\Omega$, $\nu = 22 \text{ Hz}$, se numără $N = 8$

pseudooscilații $\Rightarrow T_0 = \frac{T}{2N} = \frac{1}{2N\nu} = 0,002841 \text{ s}$, valoare experimentală, valoarea teoretică fiind:

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 0,00281$ s. Cele două valori pentru pseudoperioada T_0 , (experimentală și teoretică) practic coincid.

- Variind rezistența rezistorului în sens crescător, numărul pseudoos-cilațiilor scade.
- Se variază apoi capacitatea în ambele sensuri și se interpretează ima-ginile obținute pe ecran.

2

2.2.4. Oscilații electromagnetice forțate

Spre deosebire de oscilațiile libere, oscilațiile forțate nu se produc da-torită unui simplu impuls inițial (acesta fiind sarcina q de pe armăturile con-densatorului, în cazul descărcării oscilante a condensatorului), ele sunt menținute prin acțiunea unui agent exterior.

În cazul sistemelor oscilante mecanice, de exemplu, oscilațiile forțate se obțin dacă se aplică sistemului o forță exterioară, cu variație periodică.

Conectând un generator de curent alternativ într-un circuit oscilant (fig. 2.57), se obțin oscilații forțate (permanente). Intensitatea curentului care va circula prin circuitul oscilant nu va mai prezenta forma oscilatorie liberă amortizată, ci va avea o amplitudine constantă, determinată de t.e.m. a ge-neratorului. Frecvența oscilațiilor curentului nu va mai fi dată de parametrii L și C ai circuitului oscilant, ci de frecvența t.e.m. a generatorului.

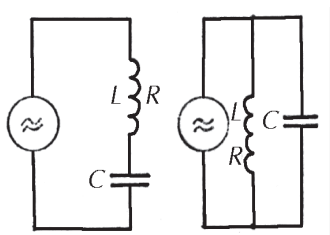


Fig. 2.57

Două moduri fundamentale de conectare a generatorului de curent alternativ sinusoidal la circuitul sinusoidal: a – circuit oscilant serie (generatorul se intercalează în serie cu elementele L și C); b – circuitul oscilant paralel (se conectează generatorul în paralel cu circuitul oscilant).

Proprietățile oscilațiilor forțate, care corespund proprietăților curentului în regim de oscilații forțate în circuitul RLC uzual de curent alternativ*, serie sau paralel, sunt:

a) amplitudinea oscilațiilor forțate depinde de tensiunea electromotoare a generatorului și de relația dintre frecvența generatorului și frecvența proprie a circuitului oscilant;

b) oscilațiile forțate sunt neamortizate, adică au o amplitudine constantă (fig. 2.58, a);

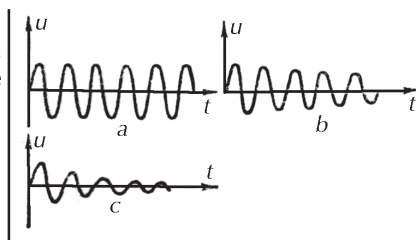
c) frecvența oscilațiilor forțate este egală cu frecvența t.e.m. a gene-ratorului și nu depinde de inductanța și capacitatea circuitului oscilant.

*Dacă $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, circuitul de curent alternativ RLC devine circuit oscilant, deoarece poate fi

sediul oscilațiilor proprii cu pulsația $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, adică apare o variație oscilatorie a mărimilor lui de stare (u_c , i , q etc.), datorită unui impuls electric inițial.

Diferite tipuri de oscilații electrice:
 a – oscilații forțate (amplitudine constantă și frecvență ν diferită de frecvența proprie ν_0 a sistemului oscilant); dacă $\nu = \nu_0$, adică la rezonanță oscilațiile devin întreținute; b – și c – oscilații slab și puternic amortizate (oscilații libere în sistemele oscilatorii reale).

Fig. 2.58



Proprietatea enunțată la punctul a) arată că circuitul oscilant prezintă caracteristica de *selectivitate*, adică nu se comportă la fel față de orice frecvență a t.e.m. aplicate. Rezultă o altă proprietate:

d) amplitudinea oscilațiilor forțate devine maximă atunci când frecvența generatorului, ν , devine egală cu frecvența proprie, ν_0 , a circuitului, frecvență numită din această cauză și *frecvență de rezonanță*.

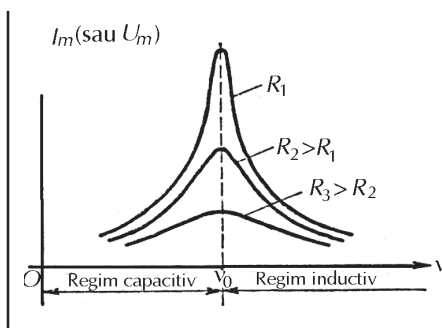
Cu alte cuvinte, circuitul oscilant „răspunde”, devine selectiv, numai dacă frecvența t.e.m. a generatorului este apropiată de frecvența de rezonanță, deci rezonează la $\nu = \nu_0$. (Cuvântul *rezonanță*, care provine din latinul *resonantia*, prin care se intitulează fenomenul analizat, înseamnă *răspuns*.)

2.2.5. Curba de rezonanță a circuitelor oscilante

Dacă se menține constantă amplitudinea tensiunii electromotoare aplicate circuitului oscilant și se variază frecvența acesteia, se obțin diferite valori ale amplitudinii oscilațiilor intensității curentului din circuit. Reprezentând grafic valorile amplitudinii oscilațiilor în funcție de frecvență, se obține o *curbă de rezonanță*. În figura 2.59 este reprezentată o asemenea curbă de rezonanță $I = f(\nu)$.

Fig. 2.59

Curbe de rezonanță pentru diferite valori ale rezistenței circuitului oscilant (din punct de vedere reactiv, pentru $\nu < \nu_0$ regimul de oscilație este capacitiv, $X_C > X_L$; pentru $\nu > \nu_0$ regimul este inductiv, $X_L > X_C$).



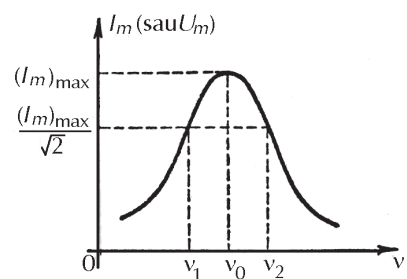
Pierderile din circuit au o influență foarte mare asupra formei curbei de rezonanță. Factorul care determină forma acestei curbe, numit *factor de calitate* al circuitului oscilant, Q , este dat de raportul dintre reactanța bobinei la rezonanță (egală cu reactanța condensatorului – tot la rezonanță) și rezistența circuitului:

$$Q = \left(\frac{L\omega}{R} \right)_{\omega=\omega_0} = \left(\frac{1}{RC\omega} \right)_{\omega=\omega_0}.$$

Pentru a obține curbe de rezonanță ascuțite, adică circuite oscilante selective, trebuie ca rezistența acestor circuite să fie cât mai mică.

Astfel, circuitul serie este des folosit în radiotehnică pentru a separa, prin fenomenul de rezonanță serie, un curent de o anumită frecvență dintr-un semnal complex (format din curenți de diferite frecvențe); procedura este numită *selectare*. Prin rezonanța unui circuit derivație, se poate obține selectarea (separarea) unui semnal de o anumită frecvență – prin tensiunea maximă pe care o produce la bornele unui circuit oscilant derivație (paralel) acordat pe frecvența respectivului semnal.

În circuitele cu dispozitive electronice este foarte importantă cunoașterea comportării acestor circuite oscilante în jurul frecvenței de rezonanță. Cel mai important parametru pentru caracterizarea acestei comportări este *lărgimea de bandă*, adică intervalul de frecvențe din vecinătatea frecvenței de rezonanță; în acest interval, amplitudinea tensiunii semnal la bornele circuitului nu scade sub o anumită fracțiune din valoarea ei de rezonanță. Se consideră – de obicei – ca lărgime de bandă a unui circuit oscilant diferența dintre cele două frecvențe la care mărimea reprezentată în curba de rezonanță (tensiune sau intensitate de curent) scade la $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (adică la 70%) din valoarea ei de rezonanță (fig. 2.60).



Definirea lărgimii de bandă

Fig. 2.60

$$B = \frac{v_0}{Q} = v_2 - v_1 \text{ a unui circuit oscilant.}$$

Lărgimea de bandă (se mai spune banda de frecvențe) a circuitelor oscilante, serie sau paralel, poate fi calculată cu formula:

$$B = \frac{v_0}{Q},$$

în care: B este lărgimea de bandă a circuitului oscilant considerat; v_0 – frecvența de rezonanță a circuitului oscilant; Q – factorul de calitate al circuitului oscilant.

Lărgimea de bandă este deci cu atât mai mică cu cât factorul de calitate este mai mare. La aceeași valoare a factorului de calitate, lărgimea de bandă crește cu frecvența de rezonanță.

2.2.6. Circuite oscilante cuplate

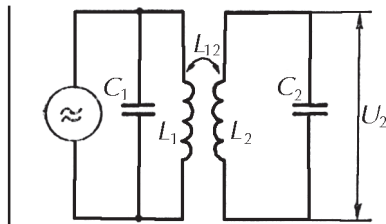
Se numesc circuite oscilante cuplate acele circuite la care se poate efectua un transfer de energie electromagnetică de la unul dintre circuite la celălalt.

Cel mai des utilizat tip de circuite oscilante cuplate este acela al circuitelor cuplate *inductiv* sau magnetic (fig. 2.61). În acest caz, cele două bobine ale circuitelor formează un transformator. Circuitul alimentat de la un generator de curent alternativ, circuit numit primar, este parcurs de un curent

care creează un flux magnetic variabil prin bobina L_2 . Se induce, astfel, o tensiune electromotoare alternativă în circuitul secundar al sistemului de circuite oscilante cuplate. Curentul datorat t.e.m. induse are aceeași frecvență ca și curentul din primar. Circuitul secundar se comportă întotdeauna ca un circuit serie, deoarece t.e.m. indusă este în serie cu elementele L și C în acest circuit.

Fig. 2.61

Circuite oscilante cuplate inductiv (cu conectare serie a generatorului, la frecvență mare a t.e.m., 10^2 – 10^6 Hz, în circuitul primar). L_{12} este inductanța mutuală a celor două bobine din circuitele oscilante, cuplate magnetic.

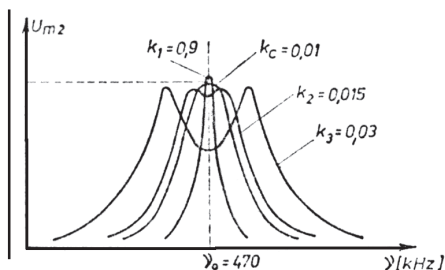


2

În figura 2.62 sunt arătate mai multe curbe de rezonanță $U_{m2} = f(\nu_1)$ ale circuitelor cuplate din fig. 2.61, acordate pe aceeași frecvență $\nu_0 = \nu_{01} = \nu_{02}$ (adică având aceeași frecvență de rezonanță ν_0), dar pentru diferiți coeficienți de cuplaj k . În cazul a două circuite cuplate magnetic (inductiv), având inducțanțele L_1 și L_2 și inductanța mutuală L_{12} (fig. 2.62), coeficientul de cuplaj are expresia $k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$, $k \in [0, 1]$.

Fig. 2.62

Curbe de rezonanță ale circuitelor cuplate: k_1 – cuplaj slab (nu se deosebește mult de curba de rezonanță a unui singur circuit oscilant, cu condiția ca cele două circuite cuplate să aibă aceeași frecvență de rezonanță, adică să fie acordate); k_c – cuplaj critic; k_2 și k_3 – cuplaj strâns.



Pe măsură ce coeficientul de cuplaj crește (adică circuitele sunt mai apropiate), curba de rezonanță își modifică forma, devine mai plată în partea superioară și, de la o anumită valoare a coeficientului de cuplaj, începe să aibă două maxime. În cazul cuplajului strâns, tensiunea la bornele circuitului secundar nu mai este maximă la frecvența de rezonanță ν_0 , ci la alte două frecvențe, ν_1 și ν_2 , diferite de frecvența de rezonanță, una mai mare și una mai mică decât aceasta: $\nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu$, $\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu$. Cu cât cuplajul este mai strâns (adică valoarea lui k este mai mare), cu atât „groapa” dintre cele două maxime este mai accentuată. Aceste fenomene se explică prin influența inversă a circuitului secundar (reacția) asupra circuitului primar, care în apropierea rezonanței induce în bobina circuitului primar o tensiune electromotoare de sens opus curentului din primar, provocând o scădere a intensității acestuia.

În montajele radio, atât la emisie cât și la recepție, circuitele cuplate au o largă utilizare.

Rezolvarea problemei următoare permite recapitularea concretă a cunoștințelor privind funcționarea circuitelor oscilante în regim de oscilații forțate (circuitul serie RLC de curent alternativ).

Problemă rezolvată

2

Un circuit oscilant serie real este alcătuit dintr-un condensator cu capacitatea $C = 318 \text{ nF}$ și o bobină cu lungimea $l = 0,1 \text{ m}$, aria secțiunii transversale $S = 10^{-4} \text{ m}^2$ și $N = 300$ spire, care are un miez cu permeabilitatea μ . La bornele circuitului oscilant se aplică o tensiune alternativă sinusoidală cu amplitudinea $U_m = \text{constant}$. La frecvența $\nu_0 = 10 \text{ kHz}$, miezul ocupă jumătate din volumul interior al solenoidului. Intensitatea efectivă a curentului este de cinci ori mai mică decât valoarea maximă a intensității efective, la aceeași frecvență.

Presupunând că miezul rămâne la jumătatea solenoidului și că frecvența variază, se cere:

a) să se determine permeabilitatea relativă a miezului; b) să se calculeze frecvențele ν_1 și ν_2 pentru care puterea activă a circuitului este jumătatea puterii active maxime, $P_{\max}$; c) să se arate că raportul dintre frecvența de rezonanță și diferența $\nu_2 - \nu_1$ este egal cu factorul de calitate al circuitului oscilant și să se calculeze valoarea acestuia; d) să se calculeze lărgimea de bandă a circuitului oscilant; e) să se deseneze schematic sistemul oscilator mecanic (oscilatorul elastic) analog circuitului oscilant descris; f) să se scrie ecuația oscilatorului elastic analoagă ecuației tensiunilor pentru circuitul oscilant; g) să se determine masa oscilatorului elastic, știind că frecvența sa proprie este de 1000 de ori mai mică decât frecvența de rezonanță a circuitului oscilant considerat, iar $k = 3955 \text{ N/m}$.

Rezolvare

a) Fluxul magnetic prin bobina circuitului oscilant, când miezul ocupă jumătate din volumul interior al acesteia, este:

$$\Phi = \frac{N}{2} S B_0 + \frac{N}{2} S \mu_r B_0 = \frac{NS}{2} \mu_0 (1 + \mu_r) \frac{NI}{l}, \text{ de unde se obține:}$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{1 + \mu_r}{2} \cdot \frac{N^2 S}{l}. \quad (1)$$

Intensitatea curentului prin circuit este dată de expresia:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

La rezonanță,
$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \quad (2)$$

și intensitatea curentului devine maximă. Din relațiile (1) și (2) se obține

$$1 + \mu_r = \frac{2l}{\mu_0 N^2 S} \cdot \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{2 \cdot 0,1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{1}{3,18 \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi^2 \cdot 10^8} = 14,09.$$

De aici rezultă $\mu_r \approx 13,09$.

b) Reactanța circuitului oscilant, în cazul când miezul ocupă complet volumul interior al bobinei, folosind și relațiile (1) și (2), este:

$$X_t = L\omega - \frac{1}{C\omega} = \mu_0 \left(\mu_r - \frac{1 + \mu_r}{2} \right) \frac{N^2 S}{l} \omega_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{13,09}{2} \cdot \frac{9 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4}}{0,1} 2\pi \cdot 10^4 = 46,51 \, \Omega$$

$$\text{Din condiția } \frac{I_{\max}}{I} = \frac{\frac{U}{Z}}{\frac{U}{Z_t}} = \frac{\sqrt{R^2 + X_t^2}}{R} = 5 \text{ se obține:}$$

$$R = \frac{X_t}{\sqrt{24}} = \frac{46,51}{4,9} = 9,5 \, \Omega.$$

Puterea activă a circuitului oscilant, în funcție de frecvență, are expresia

$$P(v) = UI(v)\cos\varphi(v) = \frac{U^2}{Z} \cdot \frac{R}{Z} = \frac{RU_m^2}{(\sqrt{2})^2 \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]}; \text{ deci } P_{\max} = \frac{U_m^2}{2R} \text{ și}$$

$$P_{v_{1,2}} = \frac{R}{2} \cdot \frac{U_m^2}{R^2 + \left(L\omega_{1,2} - \frac{1}{C\omega_{1,2}} \right)^2} \quad (3). \text{ Cum } P_{v_{1,2}} = \frac{P_{\max}}{2} = \frac{U_m^2}{4R}, \text{ din (3) se obține}$$

condiția $L\omega_{1,2} - \frac{1}{C\omega_{1,2}} = \pm R$. Rezolvând această ecuație de gradul 2 în $\omega_{1,2}$ se

$$\text{obține: } v_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}} \pm \frac{R}{2L} \right] = \sqrt{v_0^2(1 + \pi^2 R^2 C^2 v_0^2)} \pm \pi RC v_0^2 =$$

$$= 10^4 \sqrt{1 + \pi^2 (8,74)^2 (3,18)^2 \cdot 10^{-14} \cdot 10^8} \pm \pi \cdot 8,74 \cdot 3,18 \cdot 10^{-7} \cdot 10^8, \text{ cu}$$

$$v_1 = 9,19 \text{ kHz și } v_2 = 11,09 \text{ kHz.}$$

$$\text{c) } \frac{v_0}{v_2 - v_1} = \frac{v_0}{\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R}{L}} = \frac{L\omega_0}{R} = Q; Q = 5,27.$$

$$\text{d) } B = \frac{v_0}{Q} = v_2 - v_1 = \frac{10^4}{5,27} \approx 1,89 \text{ kHz.}$$

f) Ținând seama de analogiile între oscilațiile elastice și cele electrice, ecuația tensiunilor, $u = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri$, trece în ecuația analoagă:

$$F = m \frac{dv}{dt} + ky + rv.$$

$$\text{g) } v_{0e} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 10^{-3} v_0, \text{ de unde } m = 10^6 \frac{k}{4\pi^2 v_0^2} = 1 \text{ kg.}$$

2.2.7. Oscilații electromagnetice întreținute. Oscilatorul LC

În studiul circuitului oscilant s-a arătat că oscilațiile electromagnetice produse în circuit au o frecvență proprie, ν_0 , dată de formula lui Thomson:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Aceste oscilații se amortizează, adică amplitudinea lor descrește treptat în timp. Amortizarea oscilațiilor este rezultatul disipării de energie, prin efect Joule, datorită rezistenței active a circuitului oscilant.

Dacă se transferă în mod periodic circuitului oscilant o energie egală cu energia disipată, amortizarea se compensează și se obțin oscilații electromagnetice neamortizate, *întreținute*. În acest scop, se intercalează între sursa de energie și circuitul oscilant $L_0 C_0$ un „întrerupător” electronic (fig. 2.63, a). La momente de timp bine determinate, „întrerupătorul” se închide cu o frecvență egală cu frecvența proprie ν_0 a circuitului rezonant (fig. 2.63, b). Comanda „întrerupătorului” electronic o face chiar circuitul oscilant $L_0 C_0$.

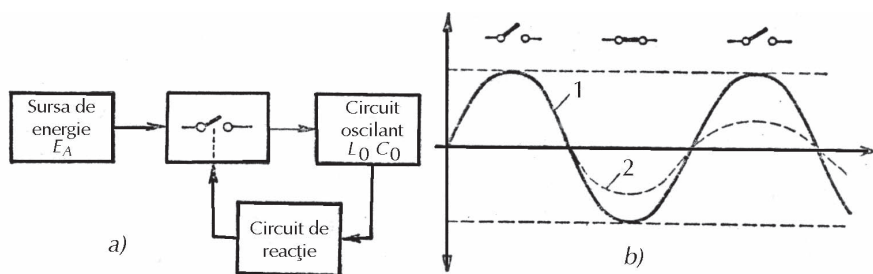


Fig. 2.63

Principiul de funcționare a unui oscilator LC: a – schema funcțională; b – obținerea oscilațiilor întreținute în circuitul $L_0 C_0$. 1. Oscilațiile întreținute obținute prin transferul periodic de energie circuitului oscilant. 2. Oscilațiile amortizate din circuitul oscilant izolat.

Definiție

Procesul de autocomandă a alimentării de către sistemul oscilant însuși se numește reacție (pozitivă). Montajul generator de oscilații electromagnetice întreținute, care realizează procesul de autocomandă (sau autoexcitație), se numește oscilator.

Probleme propuse

1.

Care dintre mărimile unui circuit oscilant paralel, cu rezistență neglijabilă, determină: a) frecvența oscilațiilor libere; b) amplitudinea oscilațiilor libere? Dar pentru un circuit oscilant serie?

2. De ce variația oscilatorie a mărimilor de stare ale circuitului oscilant continuă și după ce tensiunea la bornele condensatorului este zero?
Să se enumere toate mărimile de stare cu variație oscilatorie ale circuitului oscilant.

3. Pentru ce valoare a rezistenței unui circuit format dintr-un condensator de capacitate $4 \mu\text{F}$ și o bobină de inductanță 10 mH , circuitul devine oscilant?

R: $R < 100 \Omega$.

4. Un circuit oscilant serie are capacitatea condensatorului de 318 nF și inductanța bobinei de $0,8 \text{ mH}$.

a) Să se scrie ecuația pendulului elastic analoagă ecuației tensiunilor pentru circuitul electric descris.

b) Să se determine masa pendulului elastic, știind că frecvența sa proprie este de 1000 de ori mai mică decât frecvența de rezonanță a circuitului electric, iar $k = 3955 \text{ N/m}$.

R: 1 kg .

5. Un condensator încărcat, de capacitate $0,5 \mu\text{F}$, este conectat la bornele unei bobine de inductanță 5 mH . Să se determine după cât timp de la conectare energia câmpului electric al condensatorului devine egală cu energia câmpului magnetic al bobinei. Se neglijează rezistența circuitului.

R: $39 \mu\text{s}$.

6. Într-un circuit oscilant, cu $L = 1 \text{ mH}$ și $R = 3 \Omega$, se introduce în serie un generator de t.e.m. alternativă, cu $E_m = 1,5 \text{ V}$. Dacă frecvența t.e.m. este egală cu frecvența proprie a circuitului, $\nu_0 = 100 \text{ kHz}$, să se calculeze factorul de calitate al circuitului și tensiunea maximă la bornele condensatorului.

R: $209,3; 314 \text{ V}$.

7. Într-un circuit oscilant ideal (fig. 2.64) format din două condensatoare identice, având fiecare capacitatea C , și o bobină cu inductanța L , un condensator este încărcat, înainte de închiderea întrepunătorului $\hat{I}$, cu sarcina q_0 .

Să se stabilească:

a) expresiile intensității curentului prin circuit și a sarcinii electrice de pe armăturile condensatoarelor, în raport cu timpul;

b) analogia mecanică.

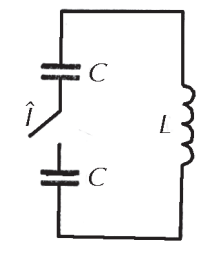


Fig. 2.64

$$\text{R: } i = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}} \sin \sqrt{\frac{2}{LC}} t; q_1 = \frac{q_0}{2} (1 + \cos \omega t); q_2 = \frac{q_0}{2} (1 - \cos \omega t).$$

2.3. Câmpul electromagnetic. Unda electromagnetică

2.3.1. Câmpul electromagnetic

Experiențele lui Oersted, Ampère, Henry și Faraday au condus la stabilirea a două principii de bază ale electromagnetismului:

- 1) un curent electric care trece printr-un conductor produce un câmp magnetic cu linii închise în jurul conductorului;
- 2) într-un conductor care intersectează linii de câmp magnetic se induce o tensiune electromotoare, deci și un câmp electric.

În 1864, James Clerk Maxwell a generalizat aceste două principii prin sistemul de ecuații care-i poartă numele.

La baza teoriei lui Maxwell stau două afirmații:

- *în jurul unui câmp magnetic variabil în timp ia naștere un câmp electric ale cărui linii sunt închise.* Intensitatea câmpului electric, $\vec{E}$, este cu atât mai mare cu cât inducția, $\vec{B}$, a câmpului magnetic variază mai rapid (fig. 2.65, a, b);
- *în jurul unui câmp electric variabil în timp ia naștere un câmp magnetic ale cărui linii sunt închise.* Inducția câmpului magnetic, $\vec{B}$, este cu atât mai mare cu cât intensitatea câmpului electric, $\vec{E}$, variază mai rapid (fig. 2.66, a, b).

Fig. 2.65

Câmpul electric produs de un câmp magnetic variabil în timp. Sensul liniilor de câmp electric este contrar celui dat de regula burghiului când vectorul $\vec{B}$ este crescător în timp și este același cu cel dat de regula burghiului când vectorul $\vec{B}$ scade în timp.

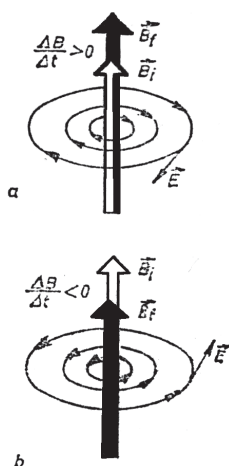
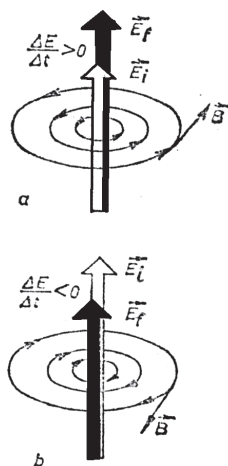


Fig. 2.66

Câmpul magnetic produs de un câmp electric variabil în timp. Sensul liniilor de câmp magnetic este dat de regula burghiului când vectorul $\vec{E}$ este crescător în timp și este contrar celui dat de regula burghiului când vectorul $\vec{E}$ scade în timp.



James Clerk Maxwell (1831–1879), fizician englez. S-a născut în Edinburgh, Scoția, în anul în care Faraday descoperă fenomenul inducției electromagnetice. Are importante contribuții în domeniul teoriei cinetice a gazelor și electromagnetismului. Generalizând legile experimentale ale fenomenelor electrice și magnetice, Maxwell a pus bazele teoriei câmpului electromagnetic. A alcătuit un sistem de ecuații care exprimă legile câmpului electromagnetic. Pe baza acestor ecuații a dedus existența undelor electromagnetice, descoperite experimental de Heinrich Hertz.

A organizat, în 1870, Laboratorul Cavendish de la Universitatea din Cambridge, devenit un centru mondial al cercetărilor în domeniul fizicii.

Este considerat, alături de Isaac Newton și Albert Einstein, drept unul dintre cei mai profunzi și mai productivi fizicieni din toate timpurile.

Conform teoriei lui Maxwell, porțiunea dintr-un circuit de curent alternativ, întreruptă de un condensator, participă la crearea câmpului magnetic exterior prin câmpul electric variabil dintre armăturile condensatorului (fig. 2.67). Prin urmare, *spațiul ocupat de un câmp electric variabil este simultan ocupat și de un câmp magnetic variabil*. Coexistența lor se explică prin generarea unuia dintre ele datorită variației celui alt.

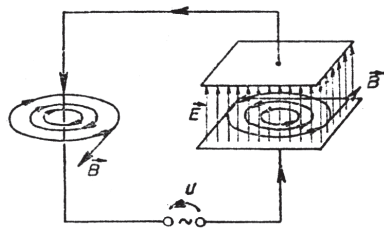


Fig. 2.67

Câmpul electric variabil din condensator generează un câmp magnetic (cazul $\frac{\Delta E}{\Delta t} > 0$).

2

Definiție

Ansamblul câmpurilor electric și magnetic, care oscilează și se generează reciproc, se numește câmp electromagnetic.

Teoria câmpului electromagnetic elaborată de Maxwell a fost deplin confirmată de experiență. Predicția lui Maxwell privind propagarea cu viteză finită (viteza luminii) a câmpului electromagnetic a devenit realitate prin ingenioasele experiențe ale lui Heinrich Hertz (1857–1894), în anul 1888.

2.3.2. Propagarea câmpului electromagnetic. Unda electromagnetică

O proprietate fundamentală a câmpului electromagnetic este capacitatea lui de a se propaga în spațiu. Dacă printr-un conductor circulă un curent alternativ de frecvență înaltă, în jurul conductorului apar câmpuri alternative, unul electric și altul magnetic. Interdependența (generarea reciprocă) dintre câmpul electric variabil și câmpul magnetic variabil explică propagarea câmpului electromagnetic în spațiu. Variațiile câmpului electric produc în spațiul înconjurător un câmp magnetic care nu rămâne constant, deoarece variază câmpul electric care l-a generat. Dar variațiile câmpului magnetic produc din nou un câmp electric care, de asemenea, variază, generând din nou un câmp magnetic ș.a.m.d. Astfel, câmpul electromagnetic este un proces oscilatoriu care se propagă din aproape în aproape, cuprinzând mereu porțiuni noi în spațiu. Într-un câmp electromagnetic ce se propagă, ambele câmpuri variază periodic în timp; pe scurt, ambele câmpuri au o variație spațio-temporală.

Heinrich Hertz (1857–1894), fizician german, născut în Hamburg, Germania. În tinerețe îl preocupă limbile străine și științele umaniste. Diverse aparate primite de la bunicul său îi determină atracția spre fizică. După ce studiază fizica și matematica la Universitatea din Berlin, se dedică cercetărilor experimentale în domeniul electromagnetismului; dovedește, în anul 1888, existența undelor electromagnetice, presupuse de M. Faraday în anul 1832 și prezise, în anul 1865, de teoria lui Maxwell. Stabilește (1887) influența luminii ultraviolete asupra descărcărilor electrice, inițiind studiul efectului fotoelectric extern. Interpretarea acestui efect va fi dată de Albert Einstein în anul 1905.



Definiție

Un câmp electromagnetic care se propagă constituie o *undă electromagnetică*.

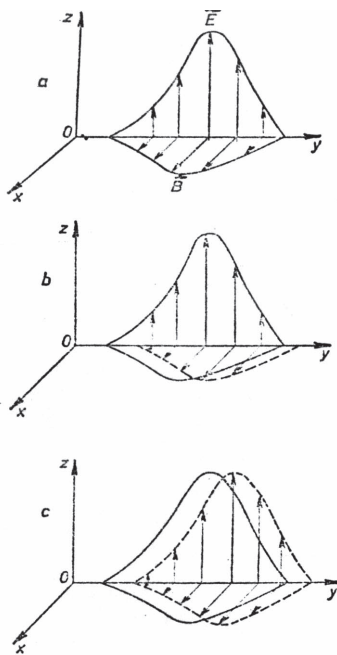


Fig. 2.68

Propagarea unei
electromagnetice.

în valoare. În regiunea din dreapta inducția magnetică a crescut și vectorul intensitate a câmpului electric indus va fi orientat în sensul pozitiv al axei Oz . Câmpul electric din această regiune va crește în intensitate. Noua distribuție a intensității câmpului electric se obține, deci, din cea inițială, printr-o deplasare spre dreapta cu aceeași distanță cu care se deplasează distribuția inducției câmpului magnetic. Pe de altă parte, conform teoriei lui Maxwell, un câmp electric de intensitate variabilă în timp determină apariția unui câmp magnetic. Are loc, deci, o deplasare a întregii distribuții, pe o distanță foarte mică în sensul pozitiv al axei Oy (fig. 2.68, c). Fenomenele se repetă apoi în mod identic. Se formează, în consecință, o undă electromagnetică ce se propagă de-a lungul direcției axei Oy , în sensul ei pozitiv.

Propagându-se în spațiu, câmpul electromagnetic pierde legătura cu conductorul în vecinătatea căruia a fost produs inițial. Chiar dacă se întrerupe oscilația curentului în conductor, unda electromagnetică își va continua deplasarea. Teoria lui Maxwell arată – și experiențele lui H. Hertz confirmă – că, într-o undă electromagnetică, vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$ oscilează în fază în plane perpendiculare între ele și perpendiculare pe direcția de propagare a undei (fig. 2.69).

Apelăm la o construcție grafică pentru a descrie mecanismul propagării unei electromagnetice prin vid. Considerăm un câmp electromagnetic ca acela din figura 2.68, a. Presupunem că numai câmpul magnetic este variabil în timp (deci $\vec{B}$ este variabil). După un interval foarte scurt de timp, Δt , el are forma de variație spațială reprezentată cu linie punctată în figura 2.68, b. Se observă că noua curbă se obține deplasând-o pe cea inițială pe o distanță foarte mică în sensul pozitiv al axei Oy .

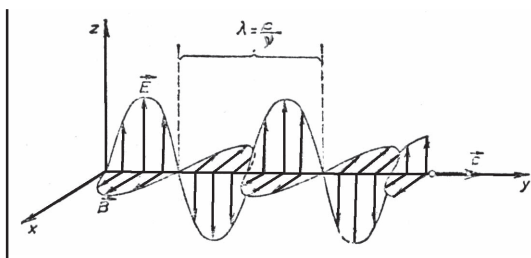
Să stabilim efectul produs asupra câmpului electric de această variație a câmpului magnetic.

În regiunea din stânga noii curbe, câmpul magnetic a scăzut ca intensitate ($\frac{\Delta B}{\Delta t} < 0$). Prin

inducție electromagnetică, ia naștere un câmp electric a cărui intensitate se adună vectorial cu intensitatea celui existent. Intensitatea câmpului electric indus va fi orientată în sensul negativ al axei Oz , deci intensitatea câmpului electric rezultat din această regiune va scădea

Fig. 2.69

În fiecare punct al spațiului atins de o undă electromagnetică, vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$ oscilează în fază, în direcții normale, Ox , respectiv Oz , pe direcția de propagare Oy . Ansamblul $(\vec{E}, \vec{B})$ formează o undă electromagnetică transversală care se propagă în vid cu viteza luminii.



Viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid a fost stabilită de Maxwell:

$$c = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0},$$

ϵ_0 și μ_0 fiind permitivitatea electrică, respectiv permeabilitatea magnetică a vidului. Înlocuind cu valorile numerice corespunzătoare, se obține

$$c = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} 12,56 \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

Această valoare coincide cu cea a vitezei luminii în vid, valoare precisă de teoria lui Maxwell.

Într-un mediu izotrop și omogen* oarecare, viteza v de propagare a undelor electromagnetice este mai mică decât în vid și are expresia:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}},$$

ϵ_r și μ_r fiind permitivitatea relativă, respectiv permeabilitatea relativă a mediului în care are loc propagarea.

Lungimea de undă a undelor electromagnetice într-un mediu izotrop și omogen oarecare este dată de relația $\lambda = \frac{v}{\nu}$.

În experiențele lui Hertz lungimea de undă era $\lambda = (0,6 \pm 0,01) \text{ m}$.

2.3.2.1. Dependența temporal-spațială a componentelor

$\vec{E}$ și $\vec{B}$ din unda electromagnetică

Să presupunem că în originea axelor de coordonate $Oxyz$ se generează unde electromagnetice (fig. 2.69); forma de variație a mărimilor vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$ este sinusoidală:

$$E_z = E_{0z} \sin \omega t; B_x = B_{0x} \sin \omega t,$$

unde: E_{0z} și B_{0x} reprezintă amplitudinile oscilației electrice, respectiv magnetice; ω – pulsația componentelor electrice, respectiv magnetice ale undei electromagnetice.

* mediu izotrop – mediu ale cărui proprietăți nu depind de direcția de observare;
mediu omogen – mediu ale cărui proprietăți nu depind de punctul de observare.

Sensul de propagare al undei este dat de sensul de înaintare a unui burghiu drept care este rotit, de la vectorul $\vec{E}$ către vectorul $\vec{B}$, pe drumul cel mai scurt. În cazul analizat, unda se propagă în sensul semiaxe pozitive Oy . Între amplitudinile intensității câmpului electric ($\vec{E}_0$) și inducției magnetice ($\vec{B}_0$) există relația: $\vec{E}_0 = \vec{B}_0 \times \vec{v}$.

Pentru a stabili relația de interdependență temporală și spațială dintre vectorii electric ($\vec{E}$) și magnetic ($\vec{B}$) ai undei electromagnetice sinusoidale, vom face următorul raționament. Considerăm un punct, A , situat la distanța y pe direcția de propagare. La timpul t vom avea în A aceeași stare care exista în O mai înainte cu timpul t' – timpul necesar undei să ajungă din O în A . Dacă viteza de propagare a undei într-un mediu omogen și izotrop este v , atunci

$t' = \frac{y}{v}$; deci, pentru intensitatea câmpului electric al undei putem scrie:

$$E = E_0 \sin \omega(t - t') = E_0 \sin \omega\left(t - \frac{y}{v}\right),$$

iar pentru inducția magnetică:

$$B = B_0 \sin \omega\left(t - \frac{y}{v}\right).$$

Argumentul acestor funcții poate fi transformat după cum urmează:

$$\omega\left(t - \frac{y}{v}\right) = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi y}{Tv} = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda}\right),$$

unde: $\lambda = vT$ reprezintă lungimea de undă pentru unda electromagnetică;

$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$ reprezintă viteza undei; T reprezintă perioada de oscilație pentru $\vec{E}$ și $\vec{B}$.

Luând în considerare relația $E_0 = vB_0$, putem scrie:

$$E = E_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda}\right); \quad B = \frac{E_0}{v} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda}\right),$$

relații care definesc unda electromagnetică în punctul y pe direcția sa de propagare.

O mărime principală care caracterizează unda electromagnetică este *densitatea volumică instantanee a energiei undei electromagnetice*, definită în fiecare punct al spațiului prin relația:

$$w = \frac{dW}{dV},$$

unde dW este energia undei electromagnetice în elementul de volum dV din jurul punctului considerat.

În cazul mediilor omogene și izotrope: $w = \epsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}$.

Se poate defini și o *densitate volumică medie (în timp) a energiei electromagnetice*, $\tilde{w}$.

Pentru mediile omogene și izotrope, aceasta are expresia:

$$\tilde{w} = \frac{\epsilon E_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu}.$$

O altă mărime importantă este *intensitatea unde electromagnetice*, I , cu unitatea de măsură $\frac{W}{m^2}$, definită prin relația: $I = \tilde{w}v$; aceasta reprezintă energia electromagnetică radiată pe direcția de propagare în unitatea de timp, prin unitatea de suprafață.

Aplicație

Intensitatea radiației solare la suprafața Pământului este $I = 1340 \text{ W/m}^2$. Să se calculeze valoarea efectivă a intensității câmpului electric, E_{ef} , al luminii solare.

Rezolvare:

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \text{ sau } I = \frac{E_{ef}^2}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}, \text{ unde } \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_v \text{ reprezintă}$$

impedanța de undă a vidului, egală cu 377Ω .

$$\text{Astfel: } E_{ef} = \sqrt{IZ_v} = \sqrt{1340 \cdot 377} = 710,76 \text{ V/m.}$$

2.3.2.2. Considerații electronice

Într-un conductor conectat la o sursă de t.e.m. alternativă, electronii de conducție oscilează sub acțiunea câmpului electric alternativ întreținut de t.e.m. alternativă. Oscilația lor se propagă din aproape în aproape în conductor, cu viteza luminii în vid, sub forma unei unde electronice longitudinale numite și undă de curent. Pentru un circuit alimentat la o tensiune cu frecvența industrială $\nu = 50 \text{ Hz}$, lungimea de undă λ a unde electronice este

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{50 \text{ Hz}} = 6000 \text{ km}.$$

Pentru circuitele obișnuite această valoare a lui λ este cu mult mai mare decât dimensiunile care le caracterizează. În circuite de acest fel, fără derivații, electronii de conducție care formează gazul electronic vor oscila în fază, în orice punct al circuitului. Intensitatea instantanee a curentului va fi, deci, aceeași în orice punct al circuitului.

Pentru conductoarele în care se stabilesc curenți de frecvență foarte înaltă, starea electrică a conductorului se schimbă. Pentru o frecvență foarte înaltă a tensiunii de alimentare, de exemplu 10^9 Hz , se obține:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^9 \text{ Hz}} = 0,3 \text{ m}.$$

În acest caz, electronii de conducție nu mai oscilează în fază în orice punct al conductorului. *Pentru frecvențe mari intensitatea instantanee a curentului nu mai este aceeași în toate punctele conductorului.* În consecință, la capetele conductorului pot apărea reflexii ale unde de curent care produc o undă staționară.

2

2.3.3. Producerea undelor electromagnetice

2.3.3.1. Circuitul oscilant deschis

Pentru obținerea unei unde electromagnetice este necesar un generator de oscilații electromagnetice, așa cum pentru producerea undelor acustice trebuie folosit un generator de oscilații acustice. Unul dintre cele mai cunoscute circuite folosite pentru a radia în spațiu unde electromagnetice este *circuitul oscilant deschis*, alimentat de un generator de oscilații electromagnetice.

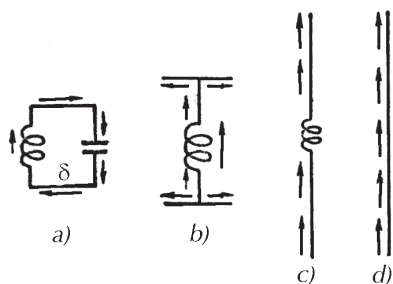


Fig. 2.70

Transformarea unui circuit oscilant închis într-un circuit oscilant deschis (dipol).

Circuitul oscilant închis nu radiază, practic, unde electromagnetice. De exemplu, în cazul circuitului oscilant închis din figura 2.70, a, curenții din laturile opuse și undele radiate de aceștia au sensuri, respectiv faze, opuse. Perpendicular pe planul circuitului, aceste unde se anulează reciproc. De-a lungul planului circuitului LC, defazajul între aceste unde este dat de latura δ a circuitului LC. Cum, în majoritatea cazurilor, $\delta \ll \lambda$, defazajul introdus de latura δ este practic nul și undele care pleacă în aceste direcții se anihilează reciproc.

Se poate schimba însă construcția circuitului oscilant, în așa fel încât, în elementele lui separate, curenții să aibă același sens. Pentru aceasta, se îndepărtează armăturile condensatorului și se întind, în linie dreaptă, conductoarele care leagă bobina de condensator (fig. 2.70, b și c).

Un circuit oscilant deschis de numește *dipol*.

Cel mai simplu circuit oscilant deschis este un fir conductor drept, străbătut de un curent alternativ de frecvență mare (fig. 2.70, d). În mijlocul conductorului liniar se intercalează o bobină pentru inducerea curentului oscilant de frecvență înaltă (fig. 2.70, c).

În spațiul din jurul dipolului există, deci, un câmp electromagnetic care oscilează periodic, cu frecvența curentului alternativ din dipol.

Sarcinile de pe dipol (fig. 2.71) produc un câmp electric peste care se suprapune câmpul generat de variația în timp a câmpului magnetic produs de curentul din dipol. Prin suprapunerea acestor două câmpuri rezultă, în momentul când intensitatea curentului în conductor este zero, un câmp electric cu linii de câmp închise. Câmpul electric cu linii închise se desprinde de dipol

(momentul $t > \frac{T}{2}$, fig. 2.71) și începe să se propage. În semiperioada următoare, procesul se repetă, dar sensul câmpurilor electric și magnetic este inversat. Oscilațiile câmpului electromagnetic se propagă în spațiu după mecanismul cunoscut.

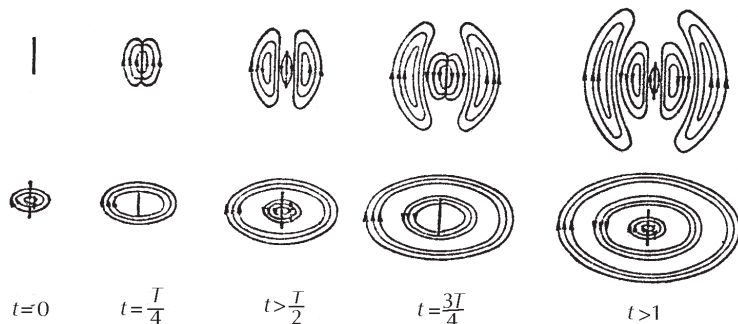


Fig. 2.71

Câmpul electromagnetic radiat de un dipol electric. În apropierea dipolului excitator, componenta magnetică și cea electrică se deplasează cu o diferență de drum $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{4}$. După ce s-au detașat, ele se propagă fără diferență de drum.

2.3.3.2. Antena

Antena este un dipol (circuit oscilant deschis), folosit pentru a radia în spațiu sau pentru a capta unde electromagnetice de o anumită frecvență. Inductanța și capacitatea unui conductor de antenă sunt uniform distribuite de-a lungul lui. Fiecare metru de conductor are, aproximativ, o capacitate de 5 pF și o inductanță de 2 μ H. Antena, ca orice circuit oscilant, va avea o frecvență proprie de oscilație, ν_0 , invers proporțională cu lungimea firului. Pentru ca energia undelor electromagnetice să aibă valori mari, trebuie ca frecvența oscilațiilor cu care este excitată antena să fie egală cu frecvența ei proprie, ν_0 . Cea mai simplă antenă constă dintr-un fir conductor izolat față de pământ, lungimea firului fiind egală cu jumătate din lungimea de undă proprie λ_0 (numită și

lungime de undă fundamentală), adică $l = \frac{\lambda_0}{2}$. O asemenea antenă se numește *dipol semiundă*. Acest tip de antenă este analog unui tub sonor de lungime $\frac{\lambda}{2}$ închis la capete. La mijloc, tubul are un orificiu unde, cu ajutorul unui sistem oscilant, se produce oscilația care provoacă rezonanța coloanei de aer. Oscilațiile mecanice ale coloanei de aer din tub dau naștere unei unde staționare cu noduri la capete. Analog, la capetele antenei, unda electronică staționară prezintă noduri (de curent), iar la mijlocul antenei un ventru (de curent).

În timpul unei semiperioade, curentul circulă într-un singur sens în lungul firului, iar în semiperioada următoare, sensul se schimbă. Curentul prezintă o distribuție neuniformă a intensității efective, zero la capete și maximă la mijlocul antenei.

Pentru $\lambda_0 = 2l$, se spune că antena lucrează pe frecvența fundamentală (*modul fundamental*).

Și tensiunea este neuniform distribuită de-a lungul antenei. S-a convenit să se numească tensiune, într-un punct oarecare al antenei, diferența de potențial dintre punctul dat și punctul simetric de pe jumătatea a doua a firului.

Cu ajutorul unui instrument de măsură adecvat (milivoltmetru electronic), se poate stabili variația tensiunii efective U de-a lungul antenei. Măsurătorile arată că valoarea maximă a tensiunii efective, adică ventrul de tensiune, este totdeauna la capetele firului (de unde și necesitatea de a izola perfect antena). La mijloc, unde se află bobina de cuplaj cu generatorul, tensiunea este nulă (nod de tensiune).

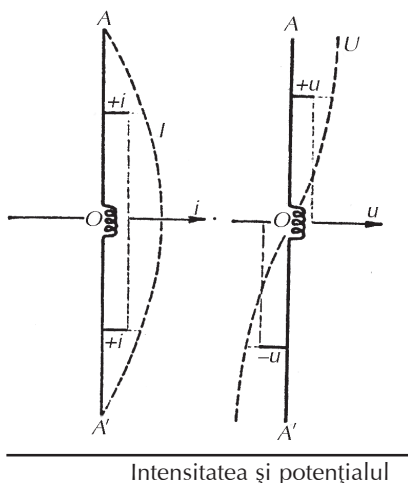


Fig. 2.72

Intensitatea și potențialul
pentru o antenă $\frac{\lambda}{2}$:
a – distribuția intensității
efective a curentului;
b – distribuția potențialului
efectiv.

În cazul unde electronice staționare din antena semiundă, valorile efective ale intensității curentului și tensiunii diferă în diversele puncte ale firului, dar distribuția lor în timp, de-a lungul firului, rămâne constantă. Variaza doar valorile instantanee i și u .

După cum se observă și în figura 2.72, a și b, ventrului de intensitate îi corespunde un nod de tensiune (de potențial, prin raportare la potențialul punctului O , considerat zero).

Între tensiunea și intensitatea curentului din antenă există un defazaj de $\frac{\pi}{2}$ rad, la fel ca la circuitul oscilant închis.

Dacă antena trebuie să funcționeze pe diferite lungimi de undă, este necesară acordarea ei, adică să fie modificată, corespunzător, lungimea de undă proprie. În

practică, antena este acordată prin aceleași metode prin care se acordează un circuit oscilant închis:

- pentru a mări lungimea de undă proprie a unei antene, se introduce în circuitul ei o bobină, ceea ce duce la același efect ca mărirea lungimii antenei;
- dacă se conectează în serie cu antena un condensator, lungimea de undă proprie a antenei se va micșora.

Condensatorul se conectează în serie cu capacitatea antenei, $C_{A'}$, deci capacitatea totală a circuitului de antenă va scădea, ceea ce este echivalent cu scurtarea antenei.

De obicei, se introduce în circuitul antenei un condensator variabil (fig. 2.73) pentru a acorda antena pe frecvența dorită.

Problemă rezolvată

Un conductor vertical, izolat la capete, formează o antenă de lungime $l = 30$ m și capacitate proprie $C_A = 100$ pF. a) Să se calculeze inductanța proprie a antenei. b) Care ar fi lungimea de undă fundamentală a antenei, dacă un capăt al ei s-ar pune la pământ? c) Ca la orice sistem oscilant (oscilator) și în cazul funcționării antenei trebuie să aibă loc oscilația valorilor energiei. Să se explice mecanismul acestui proces. d) Se presupune că intensitatea efectivă a curentului este aceeași în ambele cazuri (a) și (b). Să se arate în care dintre cazuri energia transportată de undele electromagnetice este mai mare.

Rezolvare

a) La funcționare pe modul fundamental,

$$\lambda_0 = 2l = 60 \text{ m și } \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 5 \cdot 10^6 \text{ Hz. Din condiția}$$

de rezonanță a circuitului acordat, $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, se obține $L = 10^{-5}$ H.

b) La capătul legat la pământ al antenei se formează un nod pentru potențial, deoarece potențialul pământului este nul, și un ventru de curent, deoarece electronii se pot scurge din (sau în) pământ. La capătul opus se formează un nod pentru curent, $I = 0$, la orice moment, deoarece electronii nu mai au unde să se scurgă, și un ventru de tensiune. Antena este acum analoagă unui tub sonor închis la un capăt și deschis la celălalt. Lungimea de undă fundamentală este, în acest caz, $\nu_0 = 4l = 120$ m.

c) Antena este un oscilator de tip electromagnetic. Energia câmpului electric creat de sarcinile de la capetele antenei (la momentele pentru care $i = 0$) se transformă periodic în energie a câmpului magnetic al curentului alternativ (momentele pentru care i este maxim în centrul conductorului) și viceversa.

d) La aceeași intensitate efectivă a curentului din antenă, energia undelor electromagnetice radiate este cu atât mai mare cu cât frecvența de oscilație este mai mare. Explicația constă în faptul că intensitatea câmpului electric (magnetic) generat prin variațiile câmpului magnetic (electric) – deci energia transportată de undele electromagnetice – este cu atât mai mare cu cât variațiile respective sunt mai rapide. Puterea antenei semiundă este deci mai mare decât cea a antenei sferă de undă.

2.3.3.3. Mișcarea accelerată a purtătorilor de sarcină, sursă de undă electromagnetică

Undele electromagnetice radiate de o antenă iau naștere din mișcarea accelerată a electronilor de conducție. Aceștia efectuează o mișcare oscilatorie de-a lungul antenei.

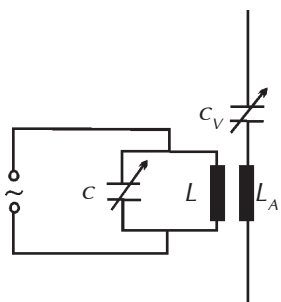


Fig. 2.73

Antenă acordată folosind un condensator variabil.

Să analizăm procesul de radiație a undelor electromagnetice pornind de la proprietățile câmpului electric și magnetic al purtătorilor de sarcină electrică.

O particulă cu sarcină aflată în repaus într-un sistem de referință creează un câmp electric coulombian în care liniile de câmp sunt uniform distribuite (fig. 2.74, a). Dacă particula se află în mișcare rectilinie uniformă, structura câmpului electric se modifică. În direcția deplasării, liniile de câmp se răresc, iar în cea perpendiculară, se îndesesc, fenomen cu atât mai pronunțat cu cât viteza particulei este mai mare.

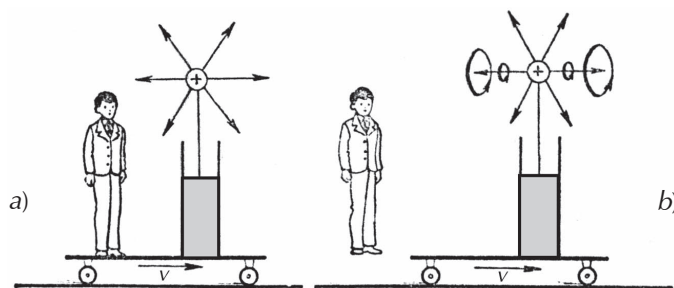


Fig. 2.74

a – Dacă particula cu sarcină electrică q se află în repaus, constatăm numai acțiunea câmpului coulombian; b – Dacă particula cu sarcină electrică q se mișcă față de noi, constatăm și acțiunea unui câmp magnetic.

În același timp, deplasarea particulei cu sarcină, fiind echivalentă cu un curent electric, rezultă că liniile câmpului magnetic sunt cercuri situate într-un plan perpendicular pe direcția mișcării (fig. 2.74, b).

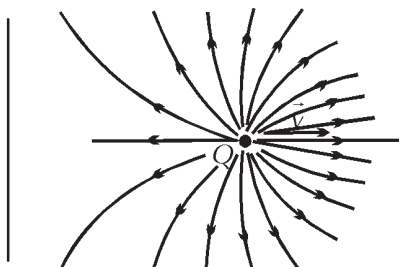
Dacă aceste considerații sunt valabile în cazul deplasării particulei într-un dielectric (de exemplu, aer sau vid), situația se modifică pentru deplasarea printr-un conductor. Deoarece într-un fir metalic se află purtători de sarcină atât pozitivi cât și negativi, câmpul electric din exteriorul conductorului este practic nul.

Curentul electric care parcurge un conductor creează, practic, numai un câmp magnetic.

Modificarea de structură a câmpului electric al particulei cu sarcină nu este însoțită și de o variație a energiei electromagnetice. Rezultă că nu apare în nici un fel un transfer de energie de la particulă la câmpul ei. Aceasta înseamnă că particula cu sarcină nu va radia unde electromagnetice. Așadar, **o particulă cu sarcină electrică în mișcare rectilinie și uniformă nu radiază unde electromagnetice.**

Fig. 2.75

Modificarea structurii liniilor de câmp electric a unei particule cu sarcină electrică aflată în mișcare rectilinie accelerată.



În cazul în care particula are o mișcare accelerată, liniile câmpului electric nu mai sunt drepte, ele devin curbe (fig. 2.75). Pentru a produce această variație, particula cu sarcină trebuie să radieze unde electromagnetice. În concluzie, *o particulă cu sarcină electrică, în mișcare accelerată, radiază unde electromagnetice.*

2.3.4. Clasificarea undelor electromagnetice

Undele (radiațiile) electromagnetice pot fi grupate după fenomenul care stă la baza producerii lor. Astfel, radiațiile numite *herțiene* se datorează oscilației electronilor în circuitele oscilante LC sau în circuitele electronice speciale („cu cavități rezonante”).

Prin transformarea energiei interne, a oricărui corp, în energie electromagnetică rezultă *radiațiile termice*. Radiațiile electromagnetice numite *radiații de frânare* apar la frânarea bruscă a electronilor în câmpul nucleului atomic. *Radiațiile de sincrotron** își au originea în mișcarea electronilor într-un câmp magnetic.

Acestor grupe de radiații le corespund anumite domenii de frecvențe (fig. 2.76).

Cea mai uzuală împărțire a radiațiilor electromagnetice se face după frecvența și lungimea de undă a acestora în vid. Această împărțire cuprinde, așa cum se arată în diagrama din figura 2.76, grupele:

1. Undele radio. Domeniul de frecvență a acestor unde este cuprins între zeci de hertzi și un gigahertz ($1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$), adică au lungimea de undă cuprinsă între câțiva kilometri și 30 cm. Se utilizează în special în transmisiile radio și TV. După lungimea de undă, se subîmpart în unde lungi (30–750 km),

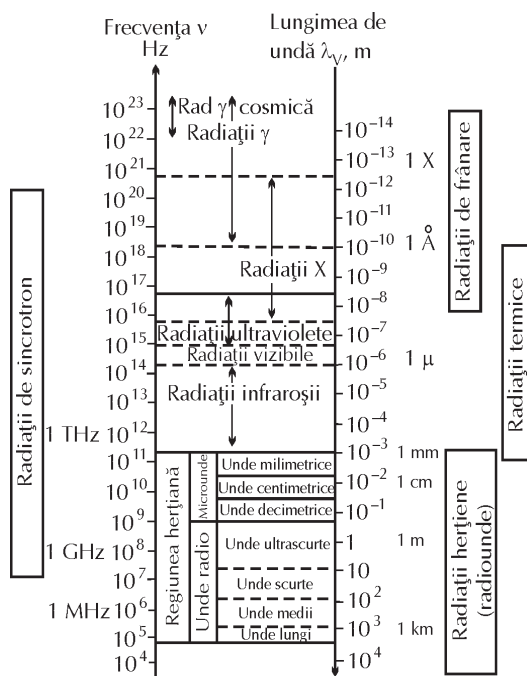


Fig. 2.76

Clasificarea undelor (radiațiilor) electromagnetice în raport cu frecvența și lungimea de undă în vid. În interiorul scalei ($\nu - \lambda_\nu$) sunt date denumirile uzuale pentru diferite intervale de frecvență (lungime de undă). În afara scalei, sunt indicate cele patru moduri de producere a radiațiilor electromagnetice.

* Denumirea se datorează faptului că acest fenomen a fost pus în evidență la o instalație de accelerare a electronilor în câmp magnetic numită sincrotron.

unde medii (750 km – 50 m), unde scurte (50–10 m) și unde ultrascurte (10 m – 30 cm).

2. Microundele. Sunt generate, la fel ca undele radio, de către instalații electronice. Lungimea de undă este cuprinsă între 30 cm și 1 mm. În mod corespunzător, frecvența variază între 10^9 – $3 \cdot 10^{11}$ Hz. Se folosesc în sistemele de telecomunicații, în radar și în cercetarea științifică aplicativă la studiul proprietăților atomilor și moleculelor, a maserului, a plasmei în sistem gaz ionizat. Se subîmpart în unde decimetrice, centimetrice și milimetrice.

3. Radiații infraroșii. Cuprind domeniul de lungimi de undă situat între 10^{-3} și $7,8 \cdot 10^{-7}$ m ($3 \cdot 10^{11}$ – $4 \cdot 10^{14}$ Hz). În general sunt produse de corpurile încălzite. În ultimul timp s-au realizat instalații electronice care emit unde infraroșii cu lungimea de undă submilimetrică. Se folosesc la cuptoare în I.R., laser, telecomenzi și acționări, teledetecție, fotografii.

4. Radiații vizibile. Sunt radiații cu lungimea de undă cuprinsă între aproximativ $7,6 \cdot 10^{-7}$ m și $4 \cdot 10^{-7}$ m. Sunt folosite în analiza chimică, fotografie, sinteza clorofilei.

5. Radiații ultraviolete. Lungimea de undă a acestor radiații este cuprinsă în domeniul $3,8 \cdot 10^{-7}$ m și $6 \cdot 10^{-10}$ m. Sunt generate de către moleculele și atomii dintr-o descărcare electrică în gaze. Soarele este o sursă puternică de radiații ultraviolete. Sunt folosite în analize chimice, fotografii, microscopie în UV.

6. Radiații X (sau Röntgen). Aceste radiații au fost descoperite în 1895 de fizicianul german W. Röntgen. Ele sunt produse în tuburi speciale, în care un fascicul de electroni, accelerat cu ajutorul unei tensiuni electrice de ordinul zecilor de mii de volți, bombardează un electrod.

7. Radiații γ constituie regiunea superioară ($3 \cdot 10^{18}$ – $3 \cdot 10^{22}$ Hz) în clasificarea undelor electromagnetice în raport cu frecvența lor. Sunt produse de către nucleele atomilor. La fel ca radiațiile X, sunt folosite în terapie, defec-toscopie, studierea cosmosului.

2.3.5. Identificarea în practică a aplicațiilor științifice și tehnice ale undelor electromagnetice.

2.3.5.1. Radiocomunicația

Proprietatea câmpului electromagnetic de a se propaga în spațiu cu o anumită viteză finită și de a transporta o anumită energie deschide acestuia multe posibilități de aplicații practice. Din multiplele aplicații ale câmpului electromagnetic, ne vom ocupa de radiocomunicații, adică de transmiterea la distanță a unor informații cu ajutorul undelor electromagnetice din domeniul de frecvență 10^5 Hz – 10^9 Hz, numite unde radio.

Informația de transmis poate fi: sunet în radiofonie (vorbitură, muzică etc.); imagine în televiziune; diverse semnale codificate (de exemplu, alfabetul Morse în telegrafie). Cu ajutorul unor traductoare adecvate (microfon, cameră de luat vederi etc.) aceste informații sunt transformate în oscilații electrice, oscilații de audiofrecvență (AF) – în cazul sunetelor –, oscilații de videofrecvență (VF) – în cazul imaginilor etc.

În paragrafele precedente s-a arătat că sursele care emit unde electromagnetice au o capacitate de emisie cu atât mai pronunțată cu cât frecvența acestora este mai mare. Pe de altă parte, cu cât vrem să transmitem simultan o cantitate mai mare de informații, cu atât frecvența undei care transportă informația, numită undă purtătoare, trebuie să fie mai mare. S-a stabilit că frecvența undei purtătoare trebuie să fie cu cel puțin un ordin de mărime mai mare decât frecvența oscilației electrice corespunzătoare informației. Deoarece informația care reprezintă sunetul corespunde unor oscilații a căror frecvență acoperă un domeniu de la 20 Hz la 20 kHz, iar în cazul imaginii acest domeniu este de 5 – 6 MHz, rezultă că frecvența undelor purtătoare trebuie să fie peste 100 kHz în radiofonie și de zeci de MHz în cadrul televiziunii.

O undă purtătoare poate fi scrisă sub forma:

$$E = E_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

unde E_0 , ω și φ reprezintă amplitudinea, pulsația și faza inițială a intensității câmpului electric a undei electromagnetice. Informația se poate transmite variind unul dintre acești parametri. Această modificare a amplitudinii, frecvenței sau fazei, în ritmul oscilației ce trebuie transmisă, se numește **modulație**. Există deci o modulație în amplitudine, în frecvență și de fază.

- Un sistem de radiocomunicații este alcătuit din trei părți: emițătorul, mediul de propagare și receptorul. Emițătorul este format dintr-un oscilator, un amplificator de radiofrecvență (RF) modulat, un amplificator de audiofrecvență (AF), prevăzut cu un microfon, și antena de emisie (fig. 2.77). Undele sonore sunt transformate de microfon în oscilații electrice de AF și amplificate de amplificatorul la care este conectat microfonul. Oscilatorul generează oscilația de RF care va da naștere undei purtătoare. Amplificatorul de RF modulat are un dublu rol: pe de o parte amplifică oscilația de RF, iar pe de altă parte modulează această oscilație cu semnalul de AF. În acest mod se obține o oscilație de RF modulată în amplitudine, frecvență sau fază. În figura 2.77 s-a reprezentat forma oscilației modulate în amplitudine în antena de emisie. Se observă

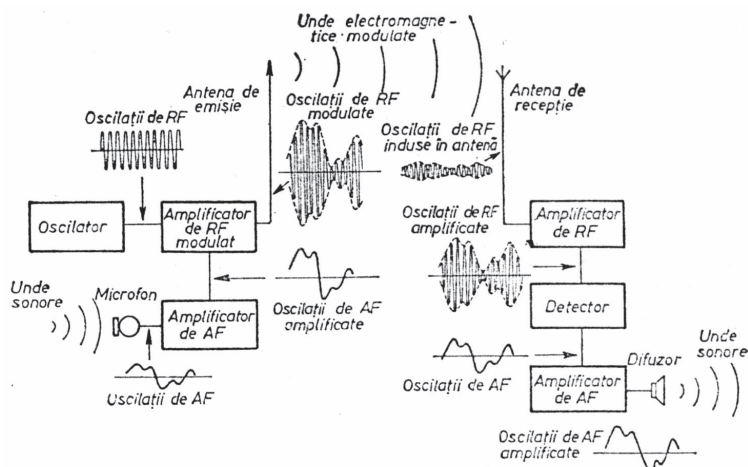


Fig. 2.77 Schema unei transmisii radiofonice.

că amplitudinea acestei oscilații nu este constantă, ci variabilă în ritmul semnalului de AF. Antena de emisie transformă aceste oscilații în unde electromagnetice modulate. Mediul de propagare pentru aceste unde, în cazul radio-comunicațiilor terestre, este atmosfera terestră.

Receptorul este format din: antena de recepție, amplificatorul de RF, detectorul, amplificatorul de AF și sistemul de redare a informației (difuzor, cască telefonică etc.). Oscilația de RF modulată, indusă în antena de recepție, este amplificată în etajul amplificator de RF. Extragerea informației din semnal, proces invers celui de modulare, are loc în etajul detector pentru modulația în amplitudine sau în etajul discriminator pentru modulația în frecvență. Semnalul de AF obținut la ieșirea etajului detector este amplificat în amplificatorul de AF și transformat în sunete de către difuzor.

- Radiocomunicațiile, adică transmiterea informației prin legătură radio între diferiți corespondenți, parcurg o adevărată revoluție tehnologică prin apariția la sfârșitul secolului a radiotelefoniei celulare.

La baza sistemelor de comunicații celulare moderne stă principiul *reutilizării frecvențelor*, adică satisfacerea unui număr mare de legături folosind un număr limitat de canale radio aflate la dispoziție.

O primă metodă de reutilizare constă în împărțirea în *celule* a teritoriului care urmează a fi acoperit, adică în zone de teren care sunt deservite de o stație terestră. Astfel, celulele vecine vor folosi frecvențe diferite, iar la depărtare de câteva celule distanță, care se determină prin analiza perturbațiilor de interfață care pot apărea, frecvențele primei celule se pot reutiliza. Aceste celule pot avea dimensiuni și forme variabile, de la 35 km (celulele mari), până la 30 m (picocelule). În ceea ce privește forma, s-au utilizat celule cu 3, 4 sau, preponderent, 6 laturi.

Sistemul de telefonie mobilă pan-european, cunoscut sub numele de GSM (Sistem Global de telecomunicații Mobile), reprezintă, în momentul de față, cea mai complexă rețea de radiocomunicații din lume.

Actualmente, tehnologia 3 G (telefonie de generația treia) introduce noi facilități:

- videotelefonie;
- mesaje însoțite de poze;
- servicii de plată directe;
- vizionarea de programe de televiziune;
- „poziționarea globală prin satelit” – GPS; noul serviciu va ajuta orice utilizator de telefon mobil să se orienteze în teren cu ajutorul unei hărți interactive.
- audierea muzicii (a melodiilor) preferate etc.

Reprezentarea digitală a semnalelor

Circuitele digitale sunt circuite destinate prelucrării semnalelor digitale, adică a acelor semnale capabile să reprezinte și semnale analogice oarecare – funcții de timp continue $s(t)$ cu valori într-un interval $[U_{min}, U_{max}]$ – cu o

precizie oricât de bună. Se poate arăta că, dacă $s(t)$, funcția care reprezintă semnalul analogic, nu are componente de frecvență mai mare ca $v_{\max}$, atunci este suficient să-i cunoaștem valorile în momente distanțate la T secunde

$\left(T < \frac{1}{2v_{\max}}\right)$ pentru ca să-i putem deduce valoarea exactă în orice moment.

Pe de altă parte, acceptând de la bun început o eroare admisibilă în redarea valorilor, le vom putea reprezenta cu un număr finit de cifre, așa cum pentru π folosim 3,14 sau pentru indicația unui aparat de măsurare cu acul între 21,5 și 22,5 acceptăm valoarea 22. Reprezentarea cifrică* sau „digitală” (*digit* = cifră) folosită în electronică se face în baza** de numerație 2 și nu 10. Corespondența între cele două reprezentări este biunivocă: scrierea unui număr în orice bază este unică și regula (algoritmul) găsirii cifrelor sale este aceeași. În baza 2 avem nevoie de două cifre, 0 și 1; în baza 10, de zece cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B.

Algoritmul constă în descompunerea numărului după puterile bazei, așa cum rezultă din următorul exemplu:

$$263 = 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

$$263_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 100000111.$$

Înlocuirea semnalului continuu funcție de timp (semnal numit *analogic*) cu valorile sale în momente discrete se numește *eșantionare*; înlocuirea valorii fiecărui eșantion cu valoarea sa (aproximativă) exprimată cu un număr fixat de cifre binare se numește *cuantizare*.

Prin cuantizare se înlocuiește funcția analogică de timp $s(t)$ cu o succesiune numerică formată doar din 0 și 1; punând în corespondență valorile 0 și 1 cu două nivele de tensiune, de exemplu $U_0 = 0$ V și $U_1 = 4$ V, se obține un *semnal digital*.

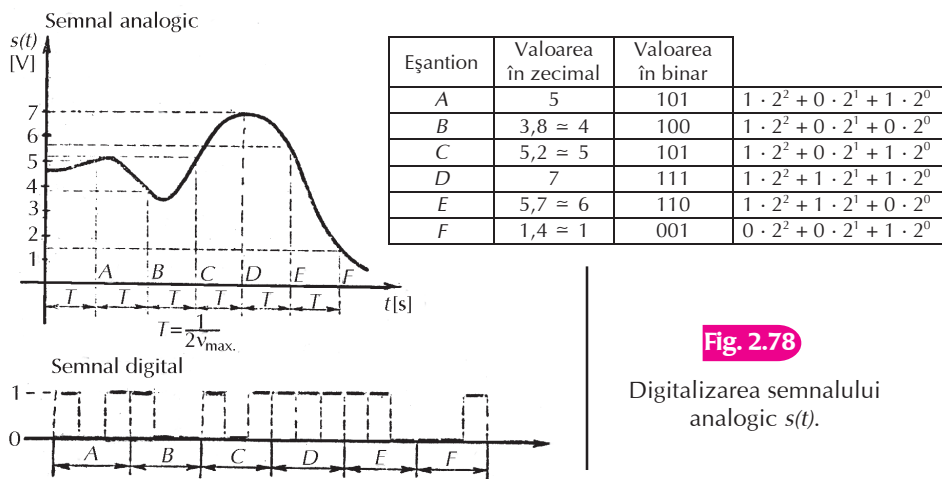
În figura 2.78 este prezentat cazul când digitalizarea este realizată cu 3 cifre binare pe eșantion, sau, cum se mai spune, cu 3 biți.

Din considerente de ordin practic, funcțional și constructiv, în calculatoarele electronice și tehnica aparaturii numerice, în electronica digitală (în general) se folosește cu predilecție sistemul binar. Astfel, dispozitivele sau elementele calculatoarelor electronice și aparaturii numerice sunt mult mai ușor de construit, caracterizate prin două stări distincte proprii unui comutator: închis și deschis, cărora li se asociază, prin convenție, cifrele binare 0 și 1. Acestea se mai numesc și biți (la singular, bit), de la cuvintele (în limba engleză) **Binary Digit** (cifră binară).

* Orice număr poate fi exprimat în oricare bază prin relația generală: $N_b = \sum_{i=0}^{n-1} c_i b^i$; $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$, în care b reprezintă baza sistemului de numerație, iar c reprezintă cifrele (coeficienții) puterilor bazei exprimate în respectiva bază. În sistemul de numerație binar $b = 2$, în cel zecimal $b = 10$. (Numerele care nu au specificată baza se consideră scrise în sistemul zecimal.)

** Mulțimea numărabilă formată din elemente (cifre) binare N_2 poate fi înzestrată cu diferite relații de ordine, astfel ca elementele ei să poată fi puse sub forma unui șir, conform unei anumite reguli. O astfel de aplicație care stabilește o legătură între mulțimea *numerelor binare* și alte mulțimi, de exemplu, mulțimea numerelor întregi în bază zece, o vom numi *cod binar*.

Conversia semnalelor din forma analogică în forma digitală se face cu circuite speciale numite convertoare analog-digitale (prescurtat CA/D) sau analog-numerice (prescurtat CA/N), iar conversia inversă o realizează convertoarele numeric-analoge (CN/A). Aceste circuite se numesc circuite interfață.



Reprezentarea digitală a semnalelor are o serie de avantaje față de reprezentarea analogică: posibilitatea de refacere corectă a semnalului eventual perturbat (nu excesiv), posibilitatea de memorare și de regăsire rapidă a valorilor în circuite speciale de memorie și posibilitatea de prelucrare foarte precisă în calculatoarele digitale.

În sistemele de transmisiuni: radio, TV, telefonie fixă sau mobilă, digitalizarea asigură cea mai ridicată stabilitate la perturbații. Recepționarea semnalelor transmise (stabilirea prezenței sau absenței impulsurilor) se poate face chiar în condițiile unui nivel destul de mare al perturbațiilor.

Pentru a descrie funcționarea blocurilor (circuitelor) care prelucrează semnale digitale, deci șiruri de cifre 0 și 1, este necesar un limbaj matematic adecvat, prin care să se poată analiza transformările posibile ale acestor șiruri.

Problemă rezolvată

Cunoscând componenta de frecvență maximă, $v_m = 1,5$ kHz, a spectrului unui semnal (audio) modulator, să se calculeze în cazul digitalizării cu trei cifre binare: a) frecvența de eșantionare $\frac{1}{T}$; b) durata impulsului de cuantizare t .

R: a) $\frac{1}{T} \geq 2v_{\max} = 3$ kHz (impulsul eșantion va avea durata $T \leq 0,3(3)$ ms);

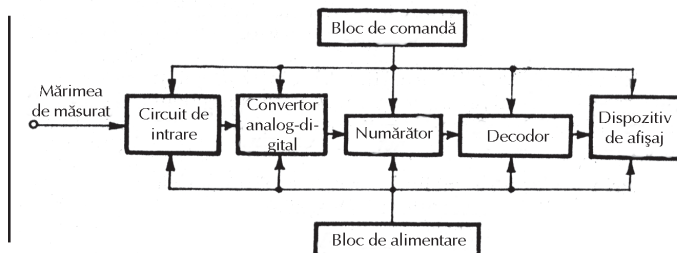
b) $t \geq \frac{T}{3} = 0,1(1)$ ms. În continuare, pentru exemplificarea practică a ceea ce

Înseamnă sistemul digital, se prezintă blocurile (circuitele) funcționale ale aparatelor digitale de măsurat.

Deși sunt de o mare diversitate, aparatele de măsurat digitale sunt alcătuite dintr-o serie de blocuri funcționale comune, conectate între ele corespunzător unei scheme bloc (fig. 2.79).

Fig. 2.79

Schema bloc a aparatelor de măsurat numerice.



Aceste blocuri funcționale sunt: *circuitul de intrare*, *convertorul analog-digital*, *numărătorul*, *decoderul*, *dispozitivul de afișare*, *blocul de comandă* și *blocul de alimentare*.

Circuitul de intrare prelucrează mărimea de măsurat pentru a obține o mărime convenabilă la intrarea convertorului. El poate fi un amplificator, când mărimea de măsurat este prea mică, un atenuator, când mărimea de măsurat este prea mare, un redresor, când mărimea de măsurat este alternativă și la intrarea convertorului se cere un semnal continuu etc.

Circuitul de intrare asigură și impedanța necesară la intrarea aparatului de măsurat digital.

Convertorul analog-digital transformă mărimile de măsurat analogice în mărimi digitale (o serie de impulsuri).

Numărătorul numără impulsurile de la ieșirea convertorului în sistem de numerație binar. Celula elementară de numărare în sistemul binar este un circuit basculant bistabil.

Dispozitivul de afișare afișează sub formă zecimală rezultatul măsurării.

Blocul de comandă asigură comanda automată a operațiilor.

Blocul de alimentare alimentează toate celelalte blocuri funcționale.

2.3.5.2. Principiul transmisiei TV. Tubul cinescop color

Transmisia TV (radiodifuzată) presupune transmiterea la distanță a imaginii și a sunetului.

Pentru a fi transmisă o imagine, informația de strălucire este transformată mai întâi într-un semnal electric (semnal video); cu acesta se modulează apoi unda purtătoare ce urmează a fi transmisă. La recepție, imaginea va fi reconstituită din semnalul electric recepționat.

În figura 2.80 este dată orientativ schema-bloc, foarte simplificată, a unui lanț de transmisie TV.

Imaginea care urmează a fi transmisă este captată de un dispozitiv optic (1), care transformă semnalul luminos (imaginea) în semnal electric (semnal

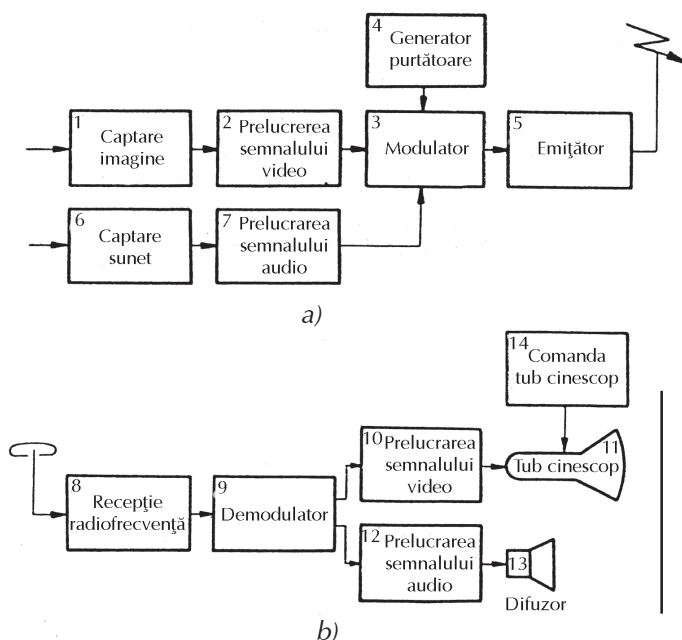


Fig. 2.80

Lanțul transmisiei TV (radiodifuzată): a – emițătorul; b – receptorul.

video). După o serie de prelucrări ale semnalului video (2), acesta modulează (3) o purtătoare de înaltă frecvență (4), care va fi transmisă spre emițător (5). Odată cu semnalul video, purtătoarea va fi modulată și de semnalul sonor captat (6), simultan cu imaginea, și prelucrată pe o cale separată (7).

Toate aceste operații, începând de la captarea imaginii și a sunetului până la emiterea purtătoarei modulate, sunt realizate în emițătorul TV (fig. 2.80, a).

Partea de receptor (fig. 2.80, b) realizează operațiile inverse celor de la emițător, scopul fiind obținerea unor semnale de strălucire (imagine) și a unor semnale sonore cât mai apropiate de cele inițiale. Semnalul TV este recepționat (8), amplificat și demodulat (9), apoi semnalul video este prelucrat (10) și aplicat traductorului electronoptic (tubul cinescop – 11), care reconstituie imaginea. Semnalul audio prelucrat (12) este aplicat difuzorului (13), care-l transformă în unde sonore, reconstituind astfel sunetul.

În condițiile creșterii aglomerației urbane, s-a impus necesitatea realizării sistemului de captare și redistribuire a semnalelor TV pe cablu.

Sistemul de recepție colectivă este ilustrat în figura 2.81.

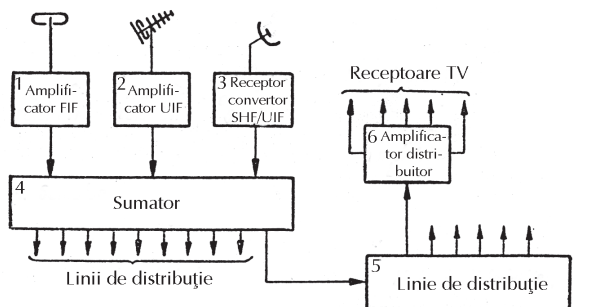


Fig. 2.81

Sistem de televiziune transmisă prin cablu.
 Domeniul FIF: > 41 MHz.
 Domeniul UIF: > 470 MHz.
 Gama SHF („supra înaltă frecvență”): > 11,7 GHz (transmisie via satelit).

Semnalele de FIF, UIF sau SHF sunt amplificate pe fiecare canal în parte, etajele (1), (2) și (3) din figura 2.81. Semnalele sunt aplicate apoi unui sistem de însumare și distribuie pe mai multe linii de distribuție, care-l transferă mai multor blocuri sau grupări de locuințe. La fiecare bloc sau grupare de locuințe există un sistem de amplificare local, de bandă largă, de unde se distribuie semnalul fiecărui receptor în parte.

În cazul în care distanțele sunt mari, este necesar ca pe linia de distribuție să se instaleze amplificatoare suplimentare pentru ridicarea nivelului pe parcurs.

Actualmente, pentru a se reduce cât mai mult atenuarea pe sistemul de distribuție, sunt folosite ca linii de transmisie fibrele optice, a căror atenuare este practic nesemnificativă (mai puțin de 1 dB/1 km).

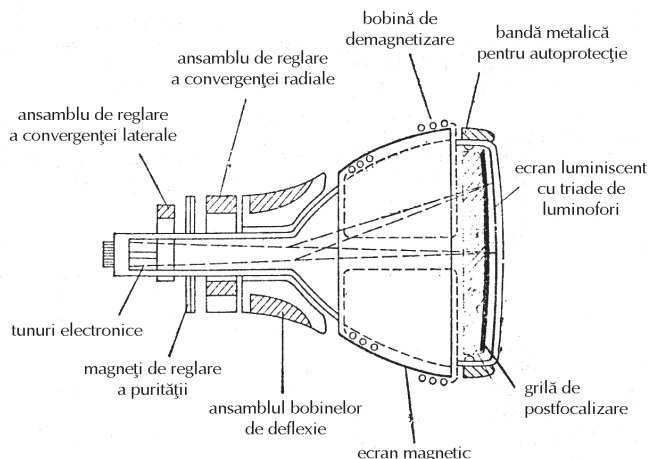
Sistemul de distribuție cu fibre optice asigură o recepție optimă oricărui receptor TV cuplat la instalație.

Sistemul presupune existența unui sistem unic de recepție pentru un cartier sau chiar un oraș.

Tubul cinescop color – *Cromatronul cu trei tunuri electronice și grilă de postfocalizare* (fig. 2.82) – are ecranul luminescent, format din benzi alternative verticale de luminofori, foarte fine, care emit lumină în culorile fundamentale: roșu, verde și albastru. Tubul are trei tunuri electronice, dispuse în plan orizontal, ale căror fascicule de electroni sunt modulate în intensitate de către semnale video corespunzătoare culorilor fundamentale. În apropierea ecranului este dispusă o grilă de postfocalizare alcătuită din fire verticale, perfect întinse, fiecare fir corespunzând unei triplete de benzi de luminofori. Între grilă și ecran se aplică o tensiune de postaccelerare, care focalizează fasciculele electronice în planul ecranului. Ea asigură în același timp și o deviație a fasciculelor, a căror traiectorie inițială nu este perpendiculară pe planul grilei, în așa fel încât fiecare fascicul să cadă doar pe banda de luminofor care corespunde tunului electronic respectiv. Cinescopului i se asociază ansamblul bobinelor de deflexie și ansamblul de reglare a convergenței, care compensează erorile provenite din toleranțele de amplasare a tunurilor electronice. Cromatronul cu trei tunuri mai poartă denumirea de *trinitron*, cinescop folosit de firma Sony.

Fig. 2.82

Tubul
cinescoptrinitron.



2.3.5.3. Detecția în infraroșu (termoviziunea)

Domeniul de infraroșu al undelor electromagnetice se situează între domeniul radiației vizibile (marginea dinspre roșu) și domeniul de microunde al undelor radio. Domeniul de infraroșu este destul de larg, prin radiație în infraroșu înțelegându-se orice radiație electromagnetică având lungimea de undă cuprinsă în intervalul $0,75\text{--}100\ \mu\text{m}$. Domeniul de infraroșu se poate împărți, la rândul său, în 3 subdomenii:

- Infraroșu apropiat, corespunzând intervalului de lungime de undă $0,75\text{--}1,3\ \mu\text{m}$;
- Infraroșu mijlociu, corespunzând intervalului de lungime de undă $1,3\text{--}3\ \mu\text{m}$;
- Radiația termică, pentru intervalul de lungime de undă $3\text{--}30\ \mu\text{m}$.

Radiația în infraroșu nu poate fi percepută de către ochiul uman, dar poate fi detectată și măsurată cu ajutorul a numeroase categorii de dispozitive special construite în acest scop (fotomultiplicatoare, componente semiconductoare speciale, camere CCD etc.). Teoretic, toate obiectele a căror temperatură este mai mare de $0\ \text{K}$ emit radiație în infraroșu. De exemplu, intensitatea radiației în infraroșu emisă de oameni prezintă un maxim în jurul valorii $\lambda = 9,4\ \mu\text{m}$.

Se cunosc trei mecanisme de transmitere a căldurii de la un obiect la altul: conducție, convecție și radiație. În solide, căldura se transmite, în principal, prin conducție, în timp ce în gaze sau în lichide, căldura se transmite mai ales prin convecție. Transmiterea căldurii prin radiație poate avea loc în toate cele trei medii. Senzația fiziologică de căldură simțită în apropierea unui obiect cald se datorează în special radiației în infraroșu emise de acesta. Pe baza acestui

principiu s-au dezvoltat *sisteme de vedere pe timp de noapte* (termoviziune). Schema bloc a unui astfel de dispozitiv este prezentată în fig. 2.83. Funcționarea unor asemenea dispozitive se bazează pe captarea și detecția radiației în infraroșu emise de obiectele vizate.

O lentilă specială formează imaginea în infraroșu a obiectelor aflate în câmpul obiectivului *dispozitivului de vedere pe timp de noapte* pe o matrice de elemente, detectoare sensibile la radiația în infraroșu (poate câteva mii de astfel de elemente). Fiecare dintre acestea furnizează la ieșire o tensiune electrică proporțională cu intensitatea radiației în infraroșu incidente.

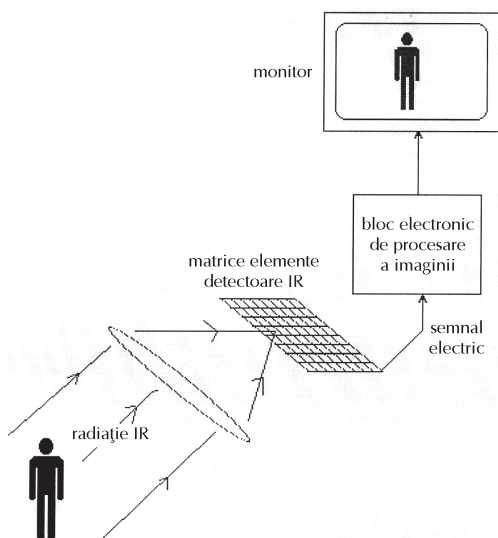


Fig. 2.83

Sistem de vedere pe timp de noapte – schema bloc.

Distribuția potențialului electric, generat de această matrice constituie o hartă a distribuției temperaturii obiectelor vizate și poartă numele de termogramă. Potențialele elementelor detectoare, care constituie matricea respectivă, sunt citite succesiv (scanate) de către un circuit electronic special, informația astfel obținută fiind procesată și trimisă către un monitor. De regulă, o astfel de matrice este citită complet în $1/30$ s. Monitorul reproduce harta termică a mediului vizat sub forma unei imagini în spectrul vizibil. În această imagine, niveluri diferite ale intensității radiației infraroșii (deci ale temperaturii) incidente sunt redată prin culori diferite. Dispozitivele obișnuite pot realiza o hartă termică a obiectelor vizate în intervalul $(-20 - 2000)$ °C, putând detecta variații de temperatură de $0,2$ °C. Dispozitive mai sofisticate, pentru care senzorii de radiații în infraroșu sunt menținuți la temperatură scăzută, sub 0 °C (detectoare criogenice), pot detecta variații de temperatură de $0,1$ °C la distanțe mai mari de 300 m.

O altă clasă de sisteme de vedere pe timp de noapte se bazează pe utilizarea tuburilor intensificatoare de imagine. Acestea sunt sisteme pasive, care captează radiația din spectrul vizibil și infraroșu *reflectată* de către obiectele vizate și o amplifică.

În timpul nopții, radiația incidentă provine în special de la lumina produsă de lună și de stele. Intensificatoarele de imagine sunt dispozitive optoelectronice speciale, al căror principiu de funcționare se aseamănă, într-o anumită măsură, cu cel al fotomultiplicatoarelor.

Schema bloc a unui tub intensificator de imagine este prezentată în figura 2.84. Un sistem de lentile focalizează radiația incidentă pe suprafața unui fotocatod. Acesta emite electroni sub acțiunea fotonilor incidenti. Electronii emiși de către fotocatod sunt accelerați într-un câmp electric intens, fiind apoi multiplicați cu un factor de ordinul miilor. Procesul de multiplicare are loc prin intermediul unor electrozi speciali, denumiți MCP (microchannel plate). Un MCP constă dintr-un disc subțire de sticlă, în care s-au practicat milioane de orificii microscopice (microcanale). Cele două fețe ale discului de sticlă sunt acoperite cu electrozi metalici. Întreg sistemul de electrozi este plasat în vid.

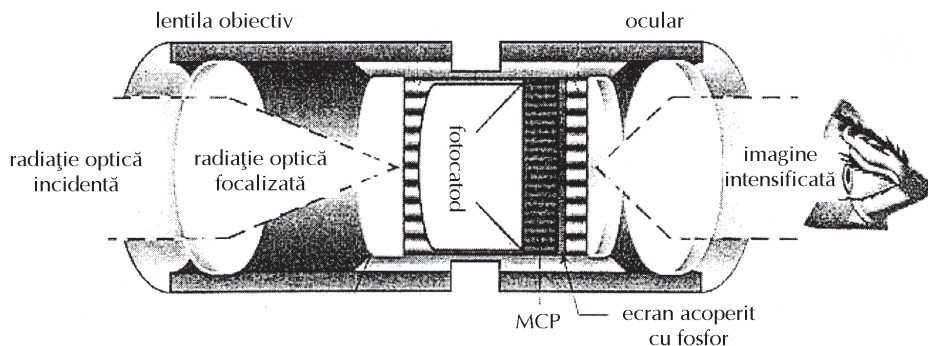


Fig. 2.84 Dispozitiv de vedere pe timp de noapte bazat pe tub intensificator de imagine.

Fiecare microcanal acționează ca un multiplicator de electroni: electronii emiși de către fotocathod sunt accelerați de câmpul electric dintre cei doi electrozi. La trecerea fiecărui electron printr-un microcanal se generează alți mii de electroni, datorită unui efect denumit emisie secundară în cascadă. Electronul inițial se ciocnește cu marginile microcanalului și excită atomii acestuia, producând alți electroni. La rândul lor, acești electroni excită alți atomi, generând alți electroni ș.a.m.d. La capătul tubului intensificator de imagine, electronii lovesc un ecran acoperit cu fosfor. Punctele în care electronii lovesc ecranul de fosfor devin luminoase, luminozitatea acestora depinzând de intensitatea fasciculului de electroni care lovește acel punct. De notat că electronii incidenți își mențin direcția lor inițială în relația cu microcanalul prin care au trecut, generându-se astfel pe ecran o imagine asemenea cu cea care ar fi fost generată de către fotonii incidenți, însă mult intensificată. La impactul cu electronii, fosforul emite o radiație luminoasă verde, de unde și nuanța verzuie



Fig. 2.85

a imaginilor obținute cu această clasă de dispozitive de vedere pe timp de noapte. În final, imaginea de pe ecranul acoperit cu fosfor este mărită și focalizată corespunzător, cu ajutorul unui sistem de lentile ocular, pentru a fi adaptată la particularitățile ochiului uman.

În figura 2.85 este reprodusă fotografia unui peisaj, realizat cu un sistem de vedere pe timp de noapte.

Amplificarea realizată de dispozitivele de vedere pe timp de noapte

de ultimă generație, construite după acest principiu, poate atinge cifre de ordinul a 30 000.

- Un aparat științific folosit în multe domenii științifice este *spectrometrul în infraroșu*. Un astfel de spectrometru a fost folosit într-o recentă descoperire de senzație, publicată în revistele științifice:

„O stea luminoasă IRS46 – din constelația Ophiuchus –, situată la circa 375 ani-lumină de Pământ, este o descoperire de senzație pentru știință. *Aparatele de măsură în infraroșu ale telescopului spațial Spitzer*, ale agenției spațiale americane NASA, au depistat în jurul acestei stele un disc imens de praf care se rotește în jurul corpului celest. Discul este format din gaze, din care se formează biomolecule de tipul ADN sau proteine. Acestea sunt *componentele vieții din care sunt alcătuiți oamenii.*”

2.3.5.4. Cuptorul cu microunde

Lucrând la o instalație radar, în anul 1946, inginerul englez Percy Spencer a observat încălzirea și înmuierea batonului de ciocolată aflat în buzunarul halatului. A doua zi, el a pus un ou lângă un tub electronic de microunde,

numit magnetron; oul a început să trepideze, apoi a explodat datorită supraîncălzirii.

Primele cuptoare cu microunde erau greoaie și costisitoare ca preț și ca randament. Astăzi aceste cuptoare sunt aspectuoase, cu randament foarte bun (70%) în comparație cu al cuptoarelor clasice și relativ ieftine. Magnetronul generează microunde cu frecvența de 2450 MHz ($\lambda = 12,24$ cm), puterea fiind de 700 W la un consum de la rețea de 1000 W. Principiul de funcționare a cuptorului constă în oscilația moleculelor de apă din alimente sub influența câmpului electric al microundelor, ceea ce determină încălzirea alimentelor.



Fig. 2.86

2

Cuptoarele cu microunde (fig. 2.86) sunt mai economice din două motive:

- puterea absorbită (1000 până la 1500 W) este inferioară cuptoarelor electrice clasice (2000–3000 W);
- timpul necesar pentru pregătirea alimentelor este mult mai mic.

De exemplu: prepararea a 500 g de legume necesită 10 minute folosind cuptorul cu microunde, la un consum de 1000 W. Cu un cuptor electric de 2000 W, sunt necesare 45 minute. În concluzie, gătitul la cuptorul cu microunde este de nouă ori mai economic.

Conform normelor internaționale, intensitatea microundelor în apropierea cuptorului este sub norma de protecție. Un telefon mobil are la emisie o putere electromagnetică de 1 W la frecvența de 1800 MHz, ceea ce înseamnă 2 mW/cm^2 la 5 cm distanță de acesta; intensitatea radiației în microunde, la aceeași distanță, în cazul cuptorului cu microunde, este de 1 mW/cm^2 .

Sistemul global de poziționare

Una dintre cele mai recente dezvoltări ale aplicațiilor microundelor folosind sateliți este Sistemul global de poziționare GPS (*Global Positioning System*). Unul dintre avantajele sistemului este acela că are acoperire asupra întregii planete, cu o precizie de circa 10 m.

Sistemul constă din 24 de sateliți plasați pe o orbită terestră joasă. Aceștia transmit prin microunde și receptoarele de la sol captează transmisiile. Minimum patru sateliți sunt recepționați simultan pentru a da o poziționare corectă și, din informațiile primite, receptorul calculează longitudinea, latitudinea și altitudinea.

Fiecare satelit este menținut pe o orbită foarte precisă. La bord, satelitul are un ceas atomic, iar informația de timp este inclusă în semnalul transmis de fiecare satelit. Timpul necesar semnalului pentru a ajunge de la satelit la receptor este proporțional cu lungimea drumului, care se poate calcula, întrucât viteza de propagare este cunoscută. Această informație este folosită în calcule.

Metoda „diferențială” care stabilește precis vectorul de stare (poziție, viteză) constă în recepționarea și prelucrarea semnalelor de navigație cu cel

puțin două receptoare GPS. Unul este mobil, la utilizator, iar celălalt este fix, precis poziționat (de exemplu, un punct al rețelei geodezice). Condiția de eliminare a erorilor este ca ambele receptoare să lucreze cu aceiași patru sateliți.

Astfel este posibilă afișarea poziției utilizatorului GPS în timp real, pe monitorul calculatorului.

Precizia metodei permite cele mai diverse aplicații:

- aviație și marină;
- trasarea hărților de cadastru, geologie, geografie etc;
- optimizarea traseelor pentru TIR-uri;
- sisteme de deplasare pentru automobile.

Mai nou, sistemul este folosit în telefonie mobilă, de aparatele G3 (un mic univers digital la purtător).

Alte utilizări ale sateliților

Sateliții sunt folosiți pentru o mulțime de alte scopuri. Ei pot avea și o serie de sarcini de observare. Sateliții pot arunca o „privire de vultur” de la înălțimi mari, asigurând imagini de ansamblu, mult mai bune, despre dezvoltarea și mișcarea formațiunilor meteo.

Sateliții pot analiza, prin teledetecție în infraroșu, cele mai multe dintre suprafețele terestre, oferind informații despre starea recoltelor, a pădurilor etc.

Ei pot detecta apariția sau răspândirea unor boli ale plantelor, într-un mod care nu ar fi posibil prin alte mijloace. În cazul explorării geologice ei pot să detecteze rezerve minerale și petroliere văzute din spațiul extraterestru.

2.3.5.5. Radiolocația cu unde electromagnetice

Definiție

Radiolocația cu unde electromagnetice înseamnă determinarea existenței și a poziției unui obiect folosind un sistem emisie-recepție bazat pe caracteristicile undelor electromagnetice (viteză de propagare constantă și propagare în linie dreaptă).

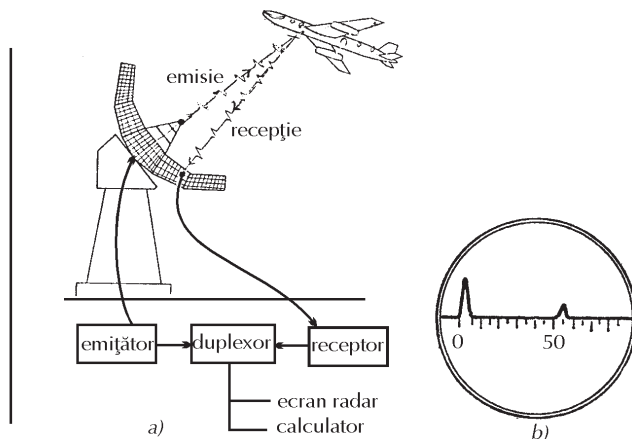
Poziția obiectului (țintei) este caracterizată de elementele din figura 2.87, a. Distanța până la obiect, r , se determină din relația $r = \frac{c\tau}{2}$, unde τ este intervalul după care este recepționată unda reflectată de obiect, iar c , viteza de propagare a undei radio (decimetrică sau centimetrică).

Instalația de radiolocație se compune, în esență, dintr-un emițător, un receptor și un sistem de antene.

Pentru a se putea stabili coordonatele unghiulare ale poziției obiectului, undele radio trebuie să fie emise sub forma unor fascicule cât mai înguste. Pentru aceasta, antena radiolocatorului se așază în focarul unei oglinzi metalice concave, care reflectă undele pe o singură direcție.

Fig. 2.87

a – Instalația de radiolocație: emițător, duplexor, receptor și antenă parabolică emisie-recepție, cu directivitate pronunțată; b – Sistemul de recepție cuprinde și un oscilograf electronic drept indicator al existenței și poziției obiectului.



Emițătorul radiolocatorului emite trenuri de unde, separate prin pauze, adică funcționează în impulsuri. În timpul pauzelor de emisie, antena se cuplează cu receptorul prin intermediul unui dispozitiv numit duplexor și recepționează undele reflectate. Intervalul de timp foarte scurt între emiterea semnalului de explorare și recepționarea lui se măsoară cu ajutorul unui oscilograf catodic cu persistență mărită a imaginii. Perioada bazei de timp este aceeași cu cea a emiterii semnalului de explorare. Spotul luminos de pe ecran începe să se deplaseze în momentul emiterii semnalului de explorare. În același moment, prin aplicarea unui impuls de tensiune pe plăcile de deflexie verticală, apare în stânga ecranului un salt vertical al spotului (fig. 2.87, b). În momentul recepției unei reflectate, pe linia de baleiaj apare un al doilea salt, mai mic, situat la dreapta față de saltul de referință. Viteza de propagare a undelor electromagnetice fiind constantă, iar viteza de explorare a liniei de baleiaj cunoscută, se poate determina distanța până la obiectul care a reflectat semnalul prin distanța între salturile de pe linie. Pentru rapiditatea determinării distanțelor, sub linia de baleiaj se aplică o scală gradată direct în kilometri.

În radiolocație se folosesc unde radio de lungime de undă mică, deoarece pot fi direcționate ușor la emisie și sunt reflectate bine și de obiecte mici. Oglinzile focalizatoare au diametre de ordinul metrului. Pentru reperarea obiectelor în regiunea din jurul radiolocatorului, antena și oglinda radiolocatorului se rotesc în jurul unui ax vertical.

Avioanele și vapoarele au la bord radiolocateoare, cu ajutorul cărora se orientează pe timp cu vizibilitate redusă (noapte, nori, ceață etc.). Aeroporturile sunt, de asemenea, prevăzute cu radiolocateoare, pentru a se putea dirija decolarea și aterizarea avioanelor în condiții de trafic intens (fig. 2.88).

Cu ajutorul radiometeolocateoarelor se poate determina dinamica norilor, ceea



Fig. 2.88

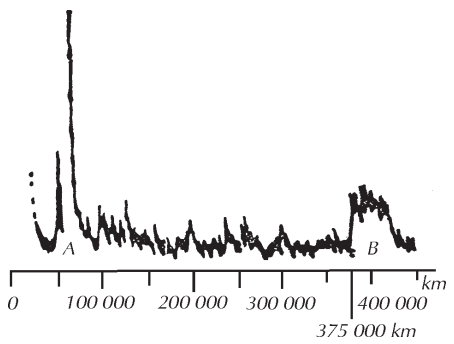


Fig. 2.89

Oscilograma primului
radioecou lunar (1946):
A – emisia semnalului;
B – recepția radioecoului.

ce reprezintă o contribuție însemnată pentru îmbunătățirea prognozei meteorologice pe interval scurt.

Un capitol al radiolocației și, în același timp, al radioastronomiei, este astronomia radar. Aceasta studiază corpurile cerești relativ apropiate de planeta noastră trimițând spre ele radio-unde și recepționând radioecourile care apar în urma reflexiei. Corpurile cerești studiate cu ajutorul radiolocației sunt: corpurile meteorice, sateliții artificiali, Luna, unele planete ale sistemului solar etc. Astronomia radar a apărut odată cu

obținerea radioecoului lunar, în 1946 (fig. 2.89). Cu ajutorul astronomiei radar s-a putut determina cu precizie perioada de rotație a planetelor Mercur și Venus; de asemenea, a fost obținută harta „radar” a Lunii, a planetei Venus etc.

2.3.5.6. Radioastronomia

Această ramură a astronomiei studiază obiectele cerești mai ales cu ajutorul radioundelor emise de acestea. A luat ființă în 1931 când, în urma cercetărilor inițiale pentru stabilirea originii diferiților paraziți radio, a fost identificată radiația radio a Căii Lactee. În 1942 s-a descoperit radiația radio a Soarelui, iar în 1946 a fost descoperită prima *radio-sursă cerească*.

- Planeta pe care ne aflăm primește din spațiul extraterestru radiații electromagnetice cuprinse într-un interval larg de frecvențe.

În medie, 77% din energia radiației electromagnetice solare interceptate de sistemul Pământ-atmosferă se reflectă la nivelul superior al atmosferei, iar o parte se absoarbe în atmosferă. La Pământ ajung numai radiațiile din domeniile numite „ferestrele” atmosferei (fig. 2.90): cele cu lungimile de undă

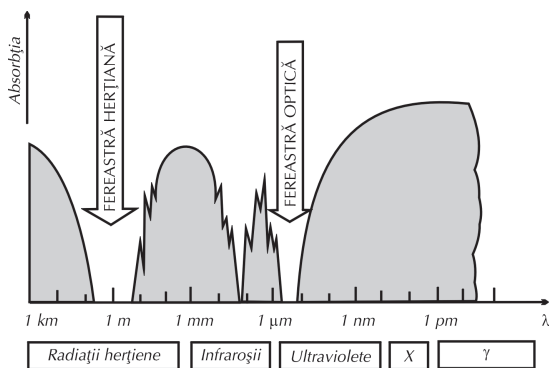


Fig. 2.90

Ferestrele de intrare a radiației
primite de Pământ.

cuprinse între 400 și 750 nm (radiațiile vizibile sau optice – fereastra optică). Pentru 2, 3, 5, 10 și 22 mm, există încă cinci ferestre foarte înguste. Radiațiile herțiene cu lungimea de undă cuprinsă între 1 cm și 30 m constituie fereastra herțiană (sau fereastra radio – radiațiile herțiene cu $\lambda > 30$ m suferă reflexia pe ionosferă).

- Soarele emite un spectru foarte larg de radiații (UV, IR, vizibile, termice, X).

- *Radiația sincrotronă* este emisă de electronii cu viteză apropiată de cea a luminii; aceștia descriu mișcări în spirală, în lungul liniilor de câmp ale unor câmpuri magnetice foarte intense, existente în unele formații stelare.

- Electronii cu energii mari și foarte mari, care apar în unele formații stelare și care sunt frânați în câmpul nucleelor întâlnite în substanța ce compune galaxiile, produc un alt tip de radiații, numite *radiații de frânare*.

- *Quasarii* sunt obiecte extragalactice care emit intens radiunde în domeniul optic, de sute de ori mai intens decât galaxiile. Natura fizică a quasarelor este încă nelămurită. Natura și locul lor în evoluția universului constituie o problemă majoră a astrofizicii și a cosmologiei.

- *Pulsarii* sunt obiecte cerești (galactice) emițătoare de radiunde (între 50 și 10^3 MHz), sub formă de impulsuri cuprinse între câteva sutimi de secundă și câteva secunde (fig. 2.91). Primul pulsar a fost descoperit în 1967. În prezent se cunosc aproximativ 100 de pulsari. În afară de domeniul radiundelor, unii pulsari emit și în domeniul optic, X și γ . Duratale scurte ale pulsațiilor pulsarelor indică valori mici ale razelor acestora, de câteva zeci de kilometri; alminteri, pulsarii s-ar descompune sub acțiunea forțelor centrifuge. Pulsarii sunt stele neutronice, a căror existență a fost prezisă teoretic cu 30 de ani înaintea descoperirii lor efective.

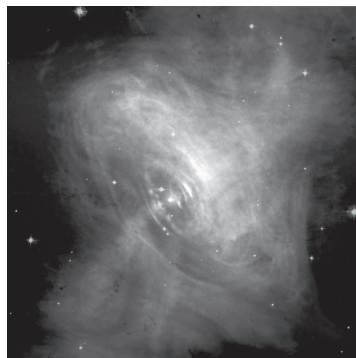


Fig. 2.91

Pulsarul din
nebulosa Crab.

2.3.6. Interacțiunea câmpurilor electromagnetice cu sistemele vii

Mărimile fizice care caracterizează câmpurile electromagnetice și în funcție de care acestea se clasifică sunt frecvența și lungimea de undă.

Astfel, putem vorbi de câmpuri electrice și câmpuri magnetice statice ($\nu = 0$), de joasă frecvență ($\nu < 300$ Hz) sau de înaltă frecvență (radiofrecvență, $300 \text{ Hz} < \nu < 300 \text{ GHz}$), în care sunt incluse și microundele ($300 \text{ MHz} < \nu < 300 \text{ GHz}$). Câmpurile de înaltă frecvență pot fi numite și radiații electromagnetice neionizante, deoarece nu determină ionizarea substanței.

Studiile privind interacțiunea câmpurilor electromagnetice cu sistemele vii se realizează separat pentru câmpurile de joasă frecvență și pentru cele de înaltă frecvență datorită proprietăților diferite ale acestora, a mecanismelor de interacție și a efectelor pe care le determină.

Datorită dezvoltării tehnologice din societatea modernă, expunerea la câmpuri a luat o amploare considerabilă.

Câteva exemple de surse de câmpuri:

- surse-câmpuri de joasă frecvență: linii de înaltă tensiune (50 Hz), stații de transformare, aparatură electrocasnică (50 Hz);

– surse-câmpuri de înaltă frecvență: echipamente de comunicații (stații de bază, antene radio-TV, telefoane mobile, telefoane fără fir etc.).

Au fost propuse mai multe mecanisme de interacție, dar nici unul nu explică complet efectele interacțiunii câmpurilor de joasă frecvență cu organismul uman: curenții electrici circulari induși în organism, prezența magnetitei (cristal feromagnetic), modelele de rezonanță în frecvență, creșterea concentrației de radicali liberi (atomi sau grupări de atomi care au un electron lipsă, ceea ce îi face foarte reactivi din punct de vedere biochimic), ipoteza melatoninei (hormon oncostatic general).

Ceea ce se știe cu siguranță este că efectul interacției câmpurilor de joasă frecvență cu sistemele vii este netermic, spre deosebire de câmpurile de radio-frecvență la care efectul predominant este termic (încălzirea țesutului expus).

În prezent, se consideră că există un posibil risc pentru starea de sănătate în cazul copiilor care locuiesc în apropierea liniilor de înaltă tensiune. În ansamblu, studiile epidemiologice nu au găsit date care să susțină convingător ipoteza conform căreia există un risc crescut de incidență a tumorilor cerebrale, a leucemiei sau a altor cancere, în corelație cu folosirea telefoanelor mobile sau a cuptoarelor cu microunde. Aceste studii nu se pot pronunța însă în privința riscului folosirii produselor menționate.

Sintetizând literatura de specialitate, reiese că cele mai multe surse folosite deliberat nu emit radiații electromagnetice neionizate, din banda microunde și radiofrecvență, peste limitele maxime admise de către Normele Generale de Protecție a Muncii 2002.

- În ceea ce privește acțiunea terapeutică a radiațiilor electromagnetice, menționăm următoarele proprietăți ale acestora:

- radiația X, prin localizare, intensitate și timpi de expunere, corespunzător controlate, poate determina distrugerea tumorilor;

- acțiunea terapeutică cea mai importantă o au radiațiile solare directe, motiv pentru care se recomandă, la modul moderat, băile de soare, plaja la munte și la mare;

- pe proprietatea de absorbție diferită a radiației Röntgen* (denumire dată după numele descoperitorului) de către substanțe se bazează utilizarea sa în radioscopie și radiografie. Obiectul a cărei radiografie trebuie făcută se așază între sursa de radiație X și un ecran fluorescent sau o placă fotografică. Radiațiile ce trec prin obiect sunt absorbite mai mult sau mai puțin de diferitele lui părți și, ca atare, impresionează diferit placa fotografică. În figura 2.92 se reprezintă radiografia Röntgen a unei labe de picior cu fractură osoasă.



Fig. 2.92

*Radiația Röntgen se numește și radiație X deoarece, timp de 15 ani de la descoperire, a părut misterioasă prin efectele ei. Prin experiențele de difracție a razelor X pe cristale (1912), Max von Lane a elaborat teoria radiației misterioase X, de unde și denumirea de X.

Probleme propuse

2

1. De ce un circuit oscilant deschis radiază mai bine undele electromagnetice decât un circuit oscilant închis?
2. De ce se acordează antena la rezonanță?
3. O antenă izolată de pământ are o lungime totală a firului de 20 m. Să se determine lungimea ei de undă și frecvența.
R: 40 m; $75 \cdot 10^5$ Hz.
4. Cum se poate mări sau micșora lungimea de undă proprie a unei antene?
5. Se poate alege un sistem de referință în care să se manifeste numai acțiunea câmpului electric creat de un fascicul electronic cu viteză constantă? Dar numai acțiunea câmpului magnetic?
R: Da. Sistemul de referință trebuie să se miște cu viteza electronilor; nu.
6. a) O undă electromagnetică care se propagă în vid are amplitudinea intensității câmpului electric $E_0 = 3 \cdot 10^{-2}$ V/m. Să se calculeze amplitudinea inducției câmpului magnetic $\vec{B}_0$.
b) Să se calculeze inducția efectivă a câmpului magnetic a luminii solare (v. cap. 2.3.2.1).
R: 10^{-10} T; $2,37 \cdot 10^{-6}$ T.
7. Care este lungimea de undă a unei unde electromagnetice care se propagă într-un mediu omogen și izotrop oarecare cu viteza $v = 2 \cdot 10^8$ m/s, dacă frecvența undei este $\nu = 1$ MHz?
R: 200 m.
8. Prin așezarea unei plăci metalice în fața unui generator de unde electromagnetice, se obține o undă staționară. Distanța dintre două noduri succesive este de 15 cm. Să se calculeze frecvența de lucru a generatorului.
R: 1 GHz.
9. Într-o bobină, prin variația intensității curentului cu 1 A în timp de 0,6 s, se induce o t.e.m. de 0,2 mV. Să se calculeze lungimea de undă proprie a circuitului oscilant care conține această bobină și un condensator, $C = 14,1$ nF.
R: 2450 m.

10.

Un condensator plan, cu aer între armături, are aria suprafeței plăcilor de 100 cm^2 . Condensatorul face parte dintr-un circuit oscilant cu lungimea de undă proprie $\lambda_1 = 10 \text{ m}$. Dacă se leagă în serie cu bobina din circuit o bobină cu inductanța $3 \mu\text{H}$, lungimea de undă proprie a circuitului devine $\lambda_2 = 20 \text{ m}$. Să se determine distanța dintre armăturile condensatorului $\left(C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \right)$.

R: $3,14 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

11.

O antenă semiundă, izolată de pământ, are o lungime de 20 cm . a) Care este frecvența generatorului de oscilații cuplat inductiv cu antena? b) Antena se introduce în apă. Cum trebuie modificată lungimea antenei pentru ca ea să rămână acordată pe frecvența de lucru a generatorului de oscilații electromagnetice?

R: $7,5 \cdot 10^8 \text{ Hz}$; micșorată de nouă ori.

12.

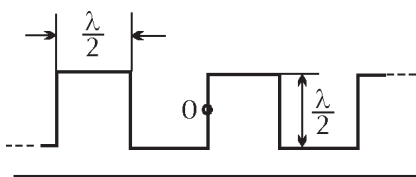


Fig. 2.93

Se consideră un conductor de forma celui din figura 2.93. La mijlocul O al uneia dintre laturile verticale ale conductorului este conectat un generator de oscilații electromagnetice. Lungimea conductorului este astfel aleasă încât să apară unde staționare.

a) Unde vor fi situate ventrele intensității curentului? b) Să se arate că acest dispozitiv este echivalent cu o rețea de antene verticale care radiază sincron.

13.

Un radiolocator emite trenuri de unde (impulsuri) cu durata unui impuls de 10^{-6} s . Frecvența de repetiție a impulsurilor este de 1000 impulsuri/s . Să se determine distanța minimă și distanța maximă de acțiune a radiolocatorului.

R: 150 m ; 150 km .

14.

Un radiolocator, care funcționează pe lungimea de undă de 15 cm , are o frecvență de repetiție de 2000 impulsuri/s . Durata fiecărui impuls este $2 \mu\text{s}$. Să se calculeze:

- distanța maximă de acțiune a radiolocatorului;
- câte oscilații conține un tren de undă (impuls).

R: 75 km ; 4000 .

Indicații pentru rezolvarea problemelor

2.1. 2. 50 Hz; 4. trec simultan; 7. maximă; 8. $-\frac{\pi}{2}$; 10. $W = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I \cos \varphi \cdot T$;

11. Z_0 pentru circuitul RLC serie; $\frac{1}{Z_0}$ pentru circuitul paralel ideal RLC ;

13. $\varphi = \arcsin \frac{I\omega - U_C}{U} = 30^\circ$; $\frac{S}{P_r} = \frac{1}{\sin \varphi} = 2$; 14. $C = \frac{1}{2\pi v_0 Z Q \cos \varphi} = 62,83 \mu F$;

16. $I = \frac{U_R}{R} = 2$ A. Din figura 2.35: $\left. \begin{aligned} U_L^2 &= U^2 - I^2(R + R_b)^2 \\ U_L^2 &= U_b^2 - I^2 R_b^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_b = \frac{U^2 - U_R^2 - U_b^2}{2RI^2} =$

$= 5 \Omega$; $R_t = R + R_b = 10 \Omega$; $L = \frac{\sqrt{U_b^2 - I^2 R_b^2}}{I\omega} = 15,91$ mH; $\varphi = \arctg \frac{L\omega}{R_t} = 26^\circ 32' 43''$;

17. a) $U \cos \varphi = \pm U \sin \varphi$ (pentru $\varphi \leq 0$) $\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \pm 1 \Rightarrow \varphi = \pm 1$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \pm 1$

$\Rightarrow LC\omega^2 \mp RC\omega - 1 = 0$; $v_{1,2} = \frac{1}{2\pi L} \left(\pm R + \sqrt{R^2 + 4 \frac{L}{C}} \right) = \begin{cases} 796 \text{ Hz} \\ 398 \text{ Hz} \end{cases}$;

$v_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 563$ Hz. b) Pentru $v_2 = 398$ Hz $\rightarrow$ regim capacitiv ($\varphi < 0$); pentru $v_1 = 796$ Hz $\rightarrow$ regim inductiv ($\varphi > 0$).

18. $\begin{cases} U = IZ = I\sqrt{(R_1 + R)^2 + (2\pi vL)^2} \\ U_2 = IZ_b = I\sqrt{R^2 + (2\pi vL)^2} \end{cases} \Rightarrow R = 5,06 \Omega$; $L = \frac{\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - (R_1 + R)^2}}{\omega} =$

$0,035$ H. $I = \frac{U_1}{R_1} = 10$ A.

19. a) $U_R = U \cos \varphi$, dar $U_R \cdot I = P = \frac{U_R^2}{R} \Rightarrow U_R^2 = PR$. Atunci: $U^2 \cos^2 \varphi = P \cdot R$

$\Rightarrow R = \frac{U^2 \cos^2 \varphi}{P} = \frac{220^2 \cdot 0,8^2}{2 \cdot 10^3} = 15,48 \Omega$.

b) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} \Rightarrow X = R \operatorname{tg} \varphi = R \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = R \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}$; $X = R \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} = 11,85 \Omega$.

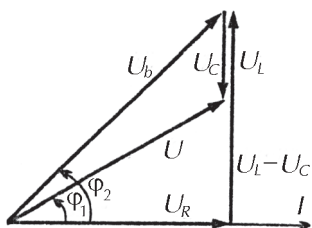
c) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{P_r}{P} \Rightarrow P_r = P \cdot \operatorname{tg} \varphi = P \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = P \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} \Rightarrow P_r = 1500$ var.

20. $\varphi = -30^\circ$; $U_b = U_c = U$. 21. $C_0 = \frac{1}{L\omega^2} = 5 \mu\text{F}$; $U_{C_{2\max}} = \frac{\sqrt{2}U}{C_0 R \omega} = 49395 \text{ V}$.

Acest exemplu numeric constituie un argument despre pericolul pe care îl reprezintă supratensiunile în instalațiile de curent alternativ.

22. a) $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = 111,8 \text{ V}$; $I = \frac{P}{U_R} = 1,5 \text{ A}$; b) $\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = 0,894$;

c) $X_L = \frac{U_L}{I} = 100 \Omega$. 23. $\tan \varphi = \frac{L\omega}{R}$; $L = \frac{R \tan \varphi}{\omega} = 36,78 \text{ mH}$.



24. Din diagrama fazorială a circuitului (fig. alăturată) se obține: $\tan \varphi_2 = \frac{X_L}{R} = \sqrt{3} \Rightarrow X_L = R\sqrt{3}$;

$\tan \varphi_1 = \frac{R}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ cu $Z = \frac{U}{I}$.

Rezultă: $R = \frac{U}{I\sqrt{2}} = \frac{60}{0,5\sqrt{2}} = 84,85 \Omega$; $X_L = 146,96 \Omega$.

25. a) $I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{750}{220 \cdot 0,6} = 5,68 \text{ A}$; $R = \frac{P}{I^2} = 23,25 \Omega$;

$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$; $L = \frac{R \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\omega \cos \varphi} = 98,7 \text{ mH}$. b) Din formula lui Thomson

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ se obține expresia pentru capacitatea condensatorului la funcționarea în condiții de rezonanță a circuitului ($\cos \varphi_0 = 1$);

$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{\cos \varphi}{\omega R \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = 102,8 \mu\text{F}$; c) $P = \frac{U^2}{R} = 2081,72 \text{ W}$.

26. Circuit RLC paralel în regim de rezonanță.

28. a) $P_{\max} = R I^2 = 2,5 \text{ W}$; b) $C_r = \frac{1}{L\omega^2} = 2,53 \mu\text{F}$; c) $P = U I \cos \varphi = U I_R = U \frac{U}{R} = \frac{Z I^2}{R}$,

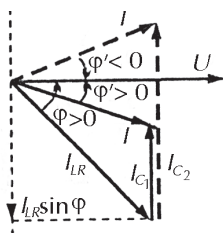
$P_{\max} = R I^2$; $P(C_{1,2}) = \frac{1}{2} P_{\max} \Rightarrow \frac{1}{Z^2} = \frac{2}{R^2} \Rightarrow \frac{1}{L\omega} - C_{1,2} \omega = \pm R$; $C_{1,2} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{L\omega} \mp R \right)$

$\Rightarrow C_1 = 0,94 \mu\text{F}$, $C_2 = 2,53 \mu\text{F}$ (regim capacitiv).

29. a) Din relațiile de calcul ale componentelor active, respectiv reactive ale intensităților curenților prin cele două laturi ale circuitului (fig. 2.43): $I_{LR} \cos \varphi = I \cos \varphi'$;

$I_{C_1} = I_{LR} \sin \varphi - I \sin \varphi'$, se obține, cu $I_{C_1} = U C_1 \omega$ și $P =$

$= U I_{LR} \cos \varphi = U I \cos \varphi'$; $C_1 = \frac{P}{U^2 \omega} (\tan \varphi - \tan \varphi')$ sau, în



$$\text{general: } C_{1,2} = \frac{P}{U^2 \omega} (\operatorname{tg} \varphi \mp \operatorname{tg} \varphi'); C_{1,2} = \frac{40}{220^2 \cdot 314} (1,33 \mp 0,33) = \begin{cases} 2,6 \mu\text{F} \\ 4,3 \mu\text{F} \end{cases}$$

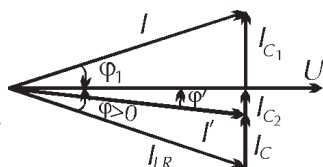
Capacitatea $C_1 = 2,6 \mu\text{F}$ corespunde factorului de putere inductiv ($\cos \varphi' = 0,95$), iar $C_2 = 4,3 \mu\text{F}$, corespunde factorului de putere capacitiv.

$$\text{b) } \frac{P_l}{P_l'} = \frac{R_l I_{LR}^2}{R_l I'^2} = \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} \right)^2 = 2,5. \text{ Pierderea de putere pe linia de alimentare este}$$

de 2,5 ori mai mare decât în cazul condensatorului legat în paralel cu tubul fluorescent. Ameliorarea factorului de putere în scopul economisirii de energie impune instalarea unor baterii de condensatoare la intrarea rețelei de alimentare în halele industriale echipate cu mașini-unelte. Acestea sunt acționate de motoare caracterizate prin parametrii electrici R și L .

29. a) În regim inductiv: $I_C = I_{LR} \sin \varphi - I' \sin \varphi'$; în regimul de funcționare cu întreprupătorul K închis (fig. alăturată): $I_{LR} = I$, $\varphi_1 = -\varphi$ și ca atare: $I_{C1} = I(\sin \varphi + \sin \varphi')$.

$$\text{Din: } \begin{cases} I_{C1} = 2I_{LR} \sin \varphi, I_{C1} = UC_1 \omega, I_{LR} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + C\omega^2}} \\ \sin \varphi = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \Rightarrow C_1 = \frac{2L}{R^2 + L^2 \omega^2} = 0,197 \mu\text{F}. \end{cases}$$



b) Pentru $C_2 = \frac{C_1}{2}$ (adică $I_{C2} = \frac{1}{2} I_{C1}$) se obține rezonanța circuitului ($\varphi_1 = 0$),

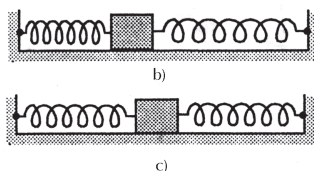
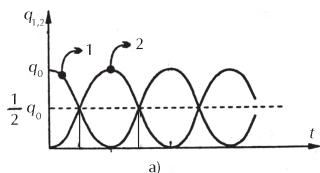
$$\text{iar } \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{I_{C2}}{I_{LR}} = \frac{UC_2 \omega}{U} = \omega C_2 \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}; \text{ prin urmare: } \varphi_2 = \varphi = 7^\circ 6' 39''.$$

Răspunsurile pentru testul de evaluare: 1) b; 2) $\omega^2 LC > 1$; $\omega^2 LC < 1$; 3) 30° ; 4) b; 5) b.

$$\text{2.2. 4. a) } -L \frac{di}{dt} = \frac{q}{C}; ma = -ky; \text{ b) } v_p = 10^{-3} v_0 \Rightarrow m = 10^6 LCk = 1 \text{ kg. 5. } t = \frac{T_0}{8};$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow t = 39,25 \mu\text{s. 6. a) } Q = \frac{2\pi v_0 L}{R} = 209,33; \text{ b) } U_{Cm} = QE_m = 314 \text{ V.}$$

7. a) Sistemul descris reprezintă un circuit oscilant, intensitatea curentului prin el fiind de forma $i = I_0 \sin \omega t$, (1), unde ω_0 este pulsația proprie, iar I_0 este amplitudinea.



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{2}{LC}}. \text{ Pentru găsirea expresiei amplitudinii } I_0 \text{ se recurge la principiul}$$

conservării energiei. Notând cu q_1 sarcina condensatorului inițial neîncărcat iar cu $q_0 - q_1$ sarcina celui alt condensator, la un moment oarecare, conform principiului conservării energiei:

$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{Li^2}{2} + \frac{q_1^2}{2C} + \frac{(q_0 - q_1)^2}{2C}; i^2 = \frac{2}{LC} q_1(q_0 - q_1), \quad (2),$$

funcție care prezintă un maxim pentru $q_1 = q_0 - q_1$ sau $q_1 = \frac{q_0}{2}$ (întrucât suma

$q_1 + q_2 = q_0$ este constantă, produsul $q_1 q_2$ este maxim pentru $q_1 = q_2 = \frac{q_0}{2}$);

$i_{\max} = I_0 = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}}$. Atunci: $i_{\max} = I_0 = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}}$. Rezultă pentru expresia (1):

$i = q_0 \sqrt{\frac{1}{2LC}} \cdot \sin \sqrt{\frac{2}{LC}} t$; introducând expresia obținută pentru i în (2), se obțin

relațiile cerute: $q_1 = \frac{q_0}{2}(1 + \cos \omega_0 t)$; $q_2 = q_0 - q_1 = \frac{q_0}{2}(1 - \cos \omega_0 t)$.

b) În momentul inițial, unul dintre resorturi este nedeformat, iar la trecerea prin poziția de echilibru ambele resorturi sunt identic deformat.

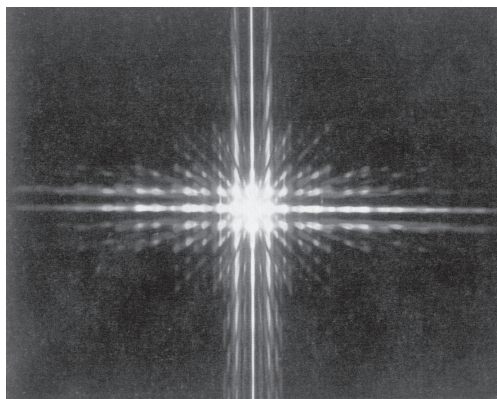
2.3. 8. $d = \frac{\lambda}{2}$; $\lambda = \frac{c}{v_g} \Rightarrow v_g = \frac{c}{2d} = 10^9 \text{ Hz}$. **10.** $d = \frac{4\pi c^2 \epsilon_0 S L'}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = 3,14 \text{ mm}$.

11. a) $v_g = v_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2l} = 7,5 \cdot 10^8 \text{ Hz}$; **b)** $v_g = \frac{v}{\lambda'_0} = \frac{c}{2l' \sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$, $l = \frac{c}{2v_g} \Rightarrow$

$$\frac{l'}{l} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{1}{9}.$$

12. La mijlocul segmentelor. **13.** $r_m = \frac{c}{2} \Delta t = 150 \text{ m}$; $r_M = \frac{cT}{2} = \frac{c}{2v} = 150 \text{ km}$.

14. a) $r_M = \frac{c}{2v} = 75 \text{ km}$; **b)** $T = \frac{\lambda}{c}$, $n = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t \cdot c}{\lambda} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8}{15 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^3$.



Capitolul

3

Optica ondulatorie

- 3.1.** Dispersia luminii. Interpretare electromagnetică
- 3.2.** Interferența
- 3.3.** Dispozitivul Young
- 3.4.** Interferența localizată. Aplicații
- 3.5.** (*) Difrakția luminii
- 3.6.** (*) Rețeaua de difracție. Aplicații
- 3.7.** (*) Polarizarea luminii. Aplicații

Unele lecții pot fi asistate de calculator, folosind site-ul:
<http://science.howstuffworks.com/physical-science-channel.htm>

Introducere

Fenomenele *propagării* luminii pot fi descrise de *teoria ondulatorie*.

În fiecare punct al unei raze de lumină vibrează câmpul electric și câmpul magnetic, caracterizate de vectorii $\vec{E}$ (intensitate a câmpului electric) și $\vec{B}$ (inducția magnetică), perpendiculari între ei și perpendiculari pe direcția de propagare. Undele luminoase sunt unde transversale.

Efectele luminoase sunt produse de componenta electrică a câmpului electromagnetic. Interacția componentei magnetice cu mediile materiale este mult inferioară celei electrice.

3.1. Dispersia luminii.(*) Interpretare electromagnetică

Viteza de propagare a luminii în medii cu indici de refracție diferiți este diferită.

Indicii de refracție absoluți pentru două medii sunt:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \text{ și } n_2 = \frac{c}{v_2}.$$

Indicele de refracție relativ al mediului 2 față de mediul 1 este:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (3.1)$$

Dacă mediile nu sunt absorbante, la trecerea dintr-un mediu în altul viteza se schimbă, dar frecvența rămâne aceeași (deoarece nu se absoarbe energie, care este direct proporțională cu pătratul frecvenței).

Prin urmare:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu} \text{ și } \lambda_2 = \frac{v_2}{\nu}.$$

Înlocuind vitezele în relația 3.1, se obține:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Definiție

Fenomenul de dependență a indicelui de refracție de lungimea de undă a luminii care trece prin mediul respectiv, $n = f(\lambda)$, se numește *dispersie*.

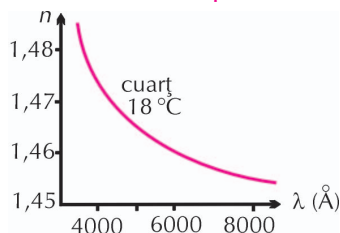


Fig. 3.1

Variația indicelui de refracție cu lungimea de undă în cazul dispersiei normale.

Expresia:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

definește *dispersia normală* – descreșterea monotonă a lui n cu creșterea lui λ (fig. 3.1).

Sunt însă și substanțe (de exemplu, vaporii de iod, fuxina, cianina) în care odată cu creșterea lungimii de undă crește indicele de refracție. În acest caz, *dispersia* se numește *anormală* (sau *anomală*).

Fenomenul de dispersie – de descompunere spațială a unei radiații în radiații monocromatice componente –, care se produce datorită dependenței indicelui de refracție de lungimea de undă, poate fi observat într-o prismă optică.

Dacă pe fața prisme se trimite un fascicul de lumină albă și fasciculul emergent cade pe un ecran, se observă o bandă luminoasă colorată diferit, de la roșu la violet. Prisma dă radiației violet o deviație maximă și radiației roșu o deviație minimă (fig. 3.2).

Exceptând nuanțele, se pot distinge 7 culori principale: roșu, portocaliu (oranji), galben, verde, albastru, indigo și violet: culorile curcubeului.

(Curcubeul se produce prin efectele combinate ale refracției, reflexiei și dispersiei luminii provenite de la Soare, de către picăturile de ploaie).

Spectrul vizibil este format din aceste *radiații monocromatice*, ale căror lungimi de undă au valorile cuprinse în interval $\sim 700 - \sim 400$ nm:

$$\begin{array}{c} \text{R O G V A I V} \\ \lambda_R \approx 700 \dots\dots\dots \lambda_V \approx 400 \text{ nm.} \end{array}$$

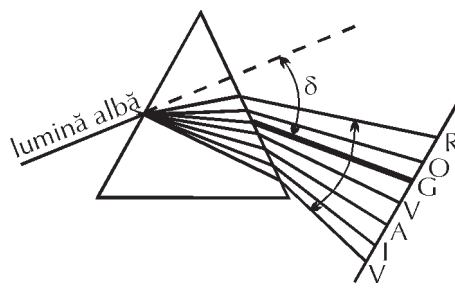


Fig. 3.2 Cele șapte radiații monocromatice rezultate prin dispersia luminii albe.

Concluzie

Pentru același unghi de incidență a luminii albe pe fața prisme, indicele de refracție al prisme crescând de la radiația roșu până la radiația violet, radiațiile monocromatice ies din prismă sub unghiuri diferite.

O radiație monocromatică ce traversează o prismă este doar deviată.

Ca măsură a deviației unei prisme se ia unghiul de deviație al luminii galbene, iar ca măsură a dispersiei, unghiul dintre radiațiile extreme, roșu și violet (fig. 3.2).

Cu cât este mai mare deviația, cu atât este mai mare dispersia.

Strălucirea diamantului se datorează și dispersiei sale mari. S-au obținut însă cristale sintetice cu dispersia de 8 ori mai mare ca a diamantului.

Probleme rezolvate

1. Un fascicul incident cade pe o prismă sub un unghi de incidență i . Acest fascicul conține radiații de două lungimi de undă diferite, λ_1 și λ_2 ($\lambda_2 > \lambda_1$). Care este unghiul dintre cele două raze refractate, în cazul dispersiei normale și anormale?

Rezolvare

Scriem legea refracției pe prima față a prisme, pentru radiațiile cu cele două lungimi de undă diferite:

$$\sin i = n_1 \sin r_1;$$

$$\sin i = n_2 \sin r_2.$$

Împărțind cele două relații rezultă:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin r_2}{\sin r_1}.$$

În cazul dispersiei normale: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$

Cum $\lambda_2 > \lambda_1 \Rightarrow \sin r_2 > \sin r_1$, deci $r_2 > r_1 \Rightarrow \Delta r = r_2 - r_1.$

În cazul dispersiei anormale:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin r_2}{\sin r_1};$$

$\lambda_2 < \lambda_1 \Rightarrow \sin r_2 < \sin r_1 \Rightarrow r_2 < r_1$, deci $\Delta r = r_1 - r_2.$

2. Cele două fețe ale unei lentile biconvexe au razele de curbura R și $2R$. Care este distanța care separă focarul radiației roșu de focarul radiației violet, cunoscând indicii de refracție n_R și n_V ?

Rezolvare

$$d = f_R - f_V.$$

Din formula lentilelor scrisă pentru cele două radiații:

Pentru radiația roșu,

$$\frac{1}{f_R} = (n_R - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = (n_R - 1) \frac{1}{2R} \Rightarrow f_R = \frac{2R}{n_R - 1}.$$

Pentru radiația violet,

$$\frac{1}{f_V} = (n_V - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = (n_V - 1) \frac{1}{2R} \Rightarrow f_V = \frac{2R}{n_V - 1}.$$

Rezultă:

$$d = f_R - f_V = 2R \frac{n_V - n_R}{(n_R - 1)(n_V - 1)}.$$

3.2. Interferența

Dacă două sau mai multe unde luminoase se suprapun într-un punct din spațiu, se obține o **figură de interferență** formată din franje luminoase (în care intensitatea luminoasă rezultantă este maximă) separate prin franje întunecate (puncte în care amplitudinea este minimă).

Pentru a se obține figura de interferență, pentru ca ea să fie vizibilă și staționară, trebuie ca undele să provină de la aceeași sursă, adică undele să fie **coerente**. Fresnel completează principiul lui Huygens, care se referea la faptul că propagarea luminii este un proces ondulatoriu, cu noțiunile de coerență și interferență a undelor elementare.

Principiul Huygens-Fresnel

Excitația luminoasă într-un punct oarecare este rezultatul interferenței tuturor undelor elementare emise de o suprafață de undă.

Atenție! Cu două surse de lumină diferite nu se poate obține o figură de interferență: undele emise de ele sunt **incoerente**.

Am mai precizat că, din unda electromagnetică, ochiul este impresionat de componenta electrică $\vec{E}$, adică de intensitatea câmpului electric.

În cazul interferenței într-un punct oarecare, componenta rezultantă va fi:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Rezultatul interferenței se apreciază după intensitatea luminoasă din punctul respectiv.

Intensitatea luminoasă este energia ce trece prin unitatea de suprafață perpendiculară pe direcția de propagare a undei, în unitatea de timp și este proporțională cu pătratul amplitudinii vectorului luminos.

Pătratul amplitudinii se obține înmulțind scalar vectorul cu el însuși:

$$\vec{E} \cdot \vec{E} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \rightarrow E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2.$$

Condiția ca două unde să dea o figură de interferență este ca $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \neq 0$, adică vectorii celor două unde să nu fie perpendiculari. Cum $I \sim E^2$, asta mai înseamnă că $I \neq I_1 + I_2$.

Să vedem ce condiții trebuie să îndeplinească diferența de fază dintre cele două unde pentru maximele și minimele din figura de interferență. Compunem două unde secundare paralele, de aceeași frecvență (provin de la aceeași sursă), și, pentru simplitate, vom considera că au aceeași amplitudine E_0 . Ecuațiile celor două unde secundare sunt:

$$E_1 = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r_1}{c} \right) \text{ și } E_2 = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r_2}{c} \right).$$

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \left[\sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r_1}{c} \right) + \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r_2}{c} \right) \right].$$

Vom folosi formula trigonometrică: $\sin a + \sin b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$.

Rezultă:

$$E = 2E_0 \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{r_2 - r_1}{2c} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r_1 + r_2}{2c} \right).$$

Amplitudinea unei rezultante, A , este dată de relația:

$$A = 2E_0 \cos \frac{\pi}{\lambda} \Delta r.$$

Intensitatea luminoasă este proporțională cu pătratul amplitudinii:

$$I \sim A^2 = 4E_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta r.$$

Pentru *maxim* de interferență condiția este:

$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta r = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{\lambda} \Delta r = k\pi \Rightarrow \Delta r = k\lambda. \quad (3.2)$$

Deci, pentru maxim de interferență *diferența de drum optic dintre cele două unde trebuie să fie egală cu un număr întreg de lungimi de undă*.

Definiție

Produsul dintre drumul geometric parcurs de lumină în mediul în care se propagă și indicele de refracție al mediului respectiv se numește *drum optic* al luminii în acel mediu.

Notând cu (δ) putem scrie: drumul optic

$$(\delta) = \sum_i n_i l_i$$

unde l_i este lungimea străbătută de raza de lumină în mediul cu indicele de refracție n_i .

În acest caz, am considerat că unda se propagă în aer și diferența de drum Δr este egală cu diferența dintre drumurile geometrice parcurse de unde.

Pentru *minim* de interferență:

$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta r = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{\lambda} \Delta r = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta r = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (3.3)$$

Regulă: Când diferența de drum dintre cele două unde este un număr impar de $\lambda/2$, se va produce un minim de interferență.

Definiție

Coerența este proprietatea undelor de a avea aceeași lungime de undă și o diferență de fază constantă în timp în punctul de suprapunere.

Fasciculele alcătuite din unde coerente sunt *fascicule coerente*, iar sursele de la care provin se numesc *surse coerente*. La suprapunerea undelor

coerente ia naștere fenomenul de interferență, vizualizat prin figura de interferență.

Concluzie: pentru a observa figura de interferență, trebuie să se realizeze două surse coerente. Aceste surse pot fi obținute prin două metode: prin divizarea frontului de undă și prin divizarea amplitudinii.

A. Divizarea frontului de undă

Divizarea frontului de undă se poate realiza cu ajutorul diferitelor *dispozitive interferențiale*:

- un paravan opac, în care se practică două deschideri mici, dispuse simetric față de piciorul perpendicularei coborâte din sursa inițială pe planul ecranului (dispozitivul Young);
- formarea a două imagini virtuale ale sursei (oglinzile Fresnel, biprisma Fresnel);
- formarea a două imagini reale ale sursei (bilentilele Billet);
- cele două surse secundare sunt sursa și imaginea ei virtuală într-o oglindă plană (oglindea Lloyd).

Interferența produsă de două surse punctuale coerente este *nelocalizată*, nu depinde de poziția ecranului pe care aceasta este observată.

B. Divizarea amplitudinii

În cazul divizării amplitudinii *sursele sunt întinse* și, dacă razele sunt paralele, figura de interferență este *localizată la infinit* putând fi observată cu ajutorul unei lentile convergente în focalul cărei se situează ecranul, sau cu ochiul liber, acomodat pentru vedere la depărtare (la infinit). În cazul peliculelor foarte subțiri (de ordinul micrometrilor), iluminate de o *sursă îndepărtată întinsă*, figura de interferență este *localizată pe suprafața peliculei*.

Aceste figuri de interferență se obțin folosind lama cu fețe plan-paralele și pana optică.

3.3. Dispozitivul Young

În cazul dispozitivului interferențial Young condiția de coerență se realizează folosind lumina emisă de o singură sursă, separată în două fascicule care trec prin două fante înguste simetrice, practicate într-un paravan opac. Cele două fascicule coerente parcurg drumuri diferite, interferând într-un punct P de pe ecran. Schema simplificată este redată în figura 3.3.

Considerând dispozitivul amplasat în aer, drumul optic δ coincide cu drumul geometric.

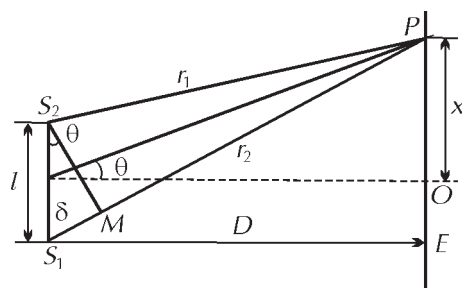


Fig. 3.3

Schema simplificată a dispozitivului Young.

Din figură se observă că:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= D^2 + (x - l/2)^2 \\ r_2^2 &= D^2 + (x + l/2)^2. \end{aligned}$$

Deci:

$$r_2^2 - r_1^2 = 2xl \Rightarrow (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2xl.$$

Deoarece D este mare în comparație cu distanța foarte mică l , $r_1 + r_2 \approx 2D$.

Rezultă:

$$\delta = r_2 - r_1 = \frac{x/l}{D}. \quad (3.4)$$

Figura de interferență are următorul aspect: în punctul O se formează un maxim central și, de o parte și de alta, simetric, se formează maxime și minime (franje de interferență). Franjele sunt echidistante și intensitatea maximelor este aceeași, indiferent de distanța față de maximum central.

Pentru a găsi distanța de la maximum central la maximum de ordinul k , pe care o notăm x_{kM} , impunem condiția de maxim pentru diferența de drum dintre cele două unde, dată de relația 3.2:

$$\frac{x_{kM}l}{D} = k\lambda \Rightarrow x_{kM} = \frac{k\lambda D}{l}. \quad (3.5)$$

Pentru a determina distanța x_{km} de la maximum central la minimum de ordinul k , impunem condiția de minim dată de relația 3.3:

$$\frac{x_{km}l}{D} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_{km} = \frac{(2k + 1)\lambda D}{2l}. \quad (3.6)$$

Franja luminoasă centrală ($k = 0$) corespunde unei diferențe de drum egală cu zero.

Definiție

Distanța dintre două maxime sau minime consecutive se numește *interfranjă*.

Interfranja se calculează ușor, din definiția ei:

$$i = x_{(k+1)M} - x_{kM} = \frac{(k+1)\lambda D}{l} - \frac{k\lambda D}{l} = \frac{\lambda D}{l}$$

sau

$$i = x_{(k+1)m} - x_{km} = \frac{[2(k+1)+1]\lambda D}{2l} - \frac{(2k+1)\lambda D}{2l} = \frac{\lambda D}{l}.$$

Deci:

$$i = \frac{\lambda D}{l}. \quad (3.7)$$

Întrucât interfranja nu depinde de x , înseamnă că franjele sunt echidistante.

Cu ajutorul relației 3.7 se poate determina lungimea de undă a unei radiații monocromatice, cunoscând distanța de la paravanul cu fante la ecran, D , distanța dintre fante, l , și interfranja, i .

Toate maximele de interferență au aceeași intensitate luminoasă:

$$I = I_{\max} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta = I_{\max} \cos^2 \pi \frac{x}{i}, \quad (3.8)$$

expresie care rezultă ușor din relațiile 3.4 și 3.7.

Figura 3.4 ilustrează intensitatea luminoasă, I , funcție de distanța față de maximul central, x .

x	$I = I_{\max} \cos^2 \pi \frac{x}{i}$
0	$I_{\max}$
i	$I_{\max}$
$i/2$	0
$i/4$	$I_{\max}/2$
$i/3$	$I_{\max}/4$

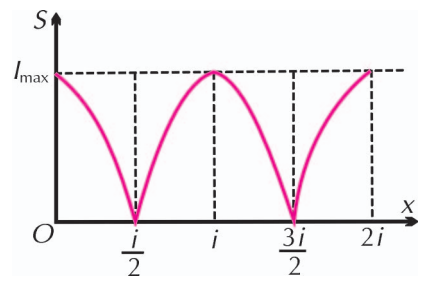


Fig. 3.4

Maximele au aceeași intensitate luminoasă.

I. Cazurile în care se modifică interfranja, fără deplasarea figurii de interferență (fără deplasarea maximului central)

1. Spațiul dintre paravan și ecran se umple cu o substanță de indice de refracție n .

Întrucât interfranja este direct proporțională cu λ și lungimea de undă depinde de indicele de refracție al mediului, interfranja se va modifica.

În aer, interfranja este:

$$i_0 = \frac{\lambda_0 D}{l}.$$

În mediul cu indicele de refracție n , interfranja devine: $i = \frac{\lambda D}{l}$.

Rezultă:

$$\frac{i}{i_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0}.$$

În cazul dispersiei normale,

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda},$$

deci:

$$\frac{i}{i_0} = \frac{1}{n} \Rightarrow i = \frac{i_0}{n}.$$

Concluzie: interfranja se micșorează.

Pentru maximul central $k = 0$:

$$x_0 = \frac{k\lambda D}{l} = 0,$$

maximul central nu se deplasează.

2. Introducând o lamă de grosime $g < D$, paralelă cu ecranul și de dimensiuni egale cu a ecranului, distanța dintre paravan și ecran devine:

$$D' = D - g(1 - 1/n).$$

$$\text{Interfranja devine: } i = \frac{\lambda_0 D'}{l} < i_0.$$

De asemenea, maximul central nu se deplasează:

$$x_0 = \frac{k\lambda D'}{l} = 0,$$

deoarece $k = 0$.

3. Introducerea între paravan și ecran a N lame, de grosimi diferite $g_1, g_2, \dots, g_m, \dots, g_m$, de indici de refracție diferiți $n_1, n_2, \dots, n_m$, micșorează interfranja.

Distanța dintre planul fantelor și ecran este:

$$D = g_1 + g_2 + \dots + g_m,$$

dacă se umple tot spațiul dintre paravan și ecran.

În acest caz:

$$D' = D - \sum_{m=1}^N g_m \left(1 - \frac{1}{n_m} \right) = D - \sum_{m=1}^N g_m + \sum_{m=1}^N \frac{g_m}{n_m} = \sum_{m=1}^N \frac{g_m}{n_m}.$$

Interfranja este egală cu:

$$i = \frac{\lambda_0 D'}{l} = \frac{\lambda_0}{l} \left(\frac{g_1}{n_1} + \frac{g_2}{n_2} + \dots + \frac{g_N}{n_N} \right).$$

II. Cazurile în care **nu se modifică interfranja, dar se deplasează figura de interferență** (se deplasează maximul central)

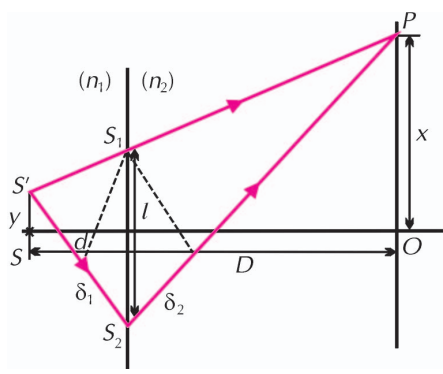


Fig. 3.5

Deplasarea figurii de interferență.

1. Sursa de lumină se deplasează în sus sau în jos. Interfranja nu se modifică, dar maximul de ordin zero se deplasează în sens invers deplasării sursei.

Așa cum se observă și în figura 3.5, deplasarea sursei introduce o diferență de drum și înainte de paravanul cu fante.

Raționând în același mod ca în cazul dispozitivului Young, vom determina diferența de drum optic dintre cele două raze.

Din figură se vede că diferența de drum optic este:

$$\delta = (S' S_2 + S_2 P) - (S' S_1 + S_1 P) = (S' S_2 - S' S_1) + (S_2 P - S_1 P),$$

adică:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

$$S' S_1^2 = d^2 + (l/2 - y)^2 = d^2 + l^2/4 + y^2 - ly.$$

$$S' S_2^2 = d^2 + (l/2 + y)^2 = d^2 + l^2/4 + y^2 + ly.$$

$$S' S_2^2 - S' S_1^2 = 2ly \Rightarrow \delta_1 = n_1 \frac{ly}{d}.$$

În același mod:

$$(S_2 P - S_1 P) = n_2 \frac{lx}{D}.$$

$$\text{Deci: } \delta = \frac{n_1 ly}{d} + \frac{n_2 lx}{D}.$$

Pentru maximul central: $\delta = 0$. Rezultă:

$$n_1 \frac{ly}{d} = -n_2 \frac{lx}{D},$$

deci, maximul central se deplasează în jos cu:

$$x_0 = -\frac{D n_2 n_1}{dn_2}. \quad (3.9)$$

2. Dacă fasciculusul cade pe paravanul cu fante sub un unghi α față de distanța dintre sursă și paravan (fig. 3.6), atunci:

$$\delta = \delta_1 - \delta_2; \delta_1 = n_1 l \sin \alpha; \delta_2 = n_2 \frac{lx}{D}.$$

Din condiția maximului central:

$$\delta = 0$$

obținem distanța cu care se deplasează în jos maximul de ordin zero:

$$x_0 = \frac{n_1}{n_2} D \sin \alpha. \quad (3.10)$$

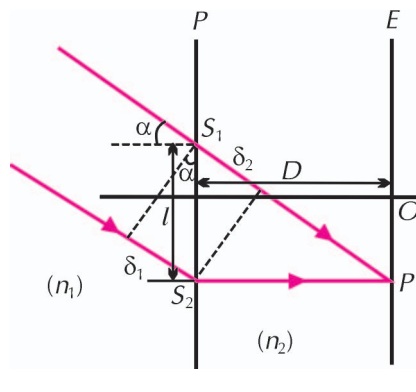


Fig. 3.6

Razele cad sub un unghi α .

3. Introducerea unei lame cu fețe plan-paralele, de grosime g și indice de refracție n , perpendicular pe drumul unei raze, determină deplasarea maximului central cu Δx spre raza în drumul căreia s-a introdus lama. Drumul optic al razei respective este mărit cu $g(n - 1)$, în care g este grosimea lamei și n - indicele de refracție al acesteia (fig. 3.7).

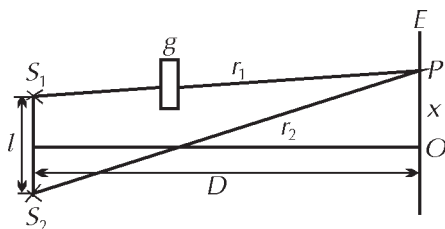


Fig. 3.7 Introducerea unei lame cu fețe plan-paralele în drumul razelor care interferă.

$$\delta = (S_2P) - (S_1P); (S_2P) = r_2 \cdot 1;$$

$$(S_1P) = r_1 - g + ng = r_1 - g(n-1),$$

deci:

$$\delta = r_2 - r_1 - g(n-1).$$

Din relația 3.4, rezultă că:

$$r_2 - r_1 = \frac{x}{D},$$

$$\text{deci: } \delta = \frac{x}{D} - g(n-1).$$

Pentru condiția de maxim:

$$\frac{x}{D} - g(n-1) = k\lambda,$$

de unde rezultă că distanța de la maximum central la maximum de ordinul k , în prezența lamei, este:

$$x_k = \frac{k\lambda D}{l} + \frac{gD(n-1)}{l}.$$

$$\text{În absența lamei } x_{k0} = \frac{k\lambda D}{l} \text{ (v. rel. 3.5).}$$

Deplasarea este:

$$\Delta x = x_k - x_{k0} = \frac{gD(n-1)}{l}.$$

Din definiția interfranței obținem:

$$\frac{D}{l} = \frac{i}{\lambda},$$

deci expresia pentru deplasarea figurii de interferență poate fi scrisă sub forma:

$$\Delta x = \frac{gD(n-1)}{l} = \frac{gi(n-1)}{\lambda}. \quad (3.11)$$

Dacă pe ecran cad două radiații de lungimi de undă λ_1 și λ_2 (presupunem că $\lambda_2 > \lambda_1$), în centrul ecranului se observă maximum de ordin zero pentru ambele radiații. Maximele de ordine superioare se așază simetric față de maximum central, fiind posibile următoarele situații:

– **Suprapunere maxim-maxim:** maximum de ordin k_1 al radiației lungimea de undă λ_1 se suprapune peste maximum de ordinul k_2 al radiației cu lungimea de undă λ_2 , adică:

$$x_{k_1M_{\lambda_1}} = x_{k_2M_{\lambda_2}} \Rightarrow \frac{k_1\lambda_1 D}{l} = \frac{k_2\lambda_2 D}{l},$$

sau:

$$k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2. \quad (3.12)$$

Dacă, de exemplu, $\lambda_1 = 5500 \text{ \AA}$ și $\lambda_2 = 6000 \text{ \AA}$, din relația 3.12 rezultă:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{12}{11},$$

adică maximum de ordinul $k_1 = 12$ al radiației cu lungimea de undă λ_1 se suprapune peste maximum de ordin $k_2 = 11$ al radiației cu lungimea de undă λ_2 .

– *Suprapunere minim-minim*:

$$x_{k_1 m \lambda_1} = x_{k_2 m \lambda_2}.$$

Conform relației 3.6:

$$\frac{(2k_1 + 1)\lambda_1 D}{2l} = \frac{(2k_2 + 1)\lambda_2 D}{2l},$$

de unde rezultă:

$$(2k_1 + 1)\lambda_1 = (2k_2 + 1)\lambda_2. \quad (3.13)$$

– *Suprapunere minim-maxim*, pentru care:

$$x_{k_1 m \lambda_1} = x_{k_2 M \lambda_2}$$

adică:

$$\frac{(2k_1 + 1)\lambda_1 D}{2l} = \frac{k_2 \lambda_2 D}{l} \Rightarrow \frac{(2k_1 + 1)\lambda_1}{2} = k_2 \lambda_2.$$

În cazul iluminării cu lumină albă, în centrul ecranului se formează albul de ordin zero. Simetric față de el se formează maximele corespunzătoare lungimilor de undă ce compun lumina albă.

Întrucât $\lambda_V < \lambda_R$, rezultă din relația 3.7 că $i_V < i_R$.

În figura de interferență, singurele spectre distincte sunt cele de ordinul $k = 1$. Pe măsură ce ordinul de interferență k crește, spectrele se lătesc și la distanță mare de centrul ecranului suprapunerea spectrelor poate da naștere așa-numitului *alb de ordin superior*.

Probleme propuse

1.

Un dispozitiv Young are distanța dintre fante $l = 0,5 \text{ mm}$ și distanța dintre planul fantelor și ecranul pe care se observă figura de interferență $D = 1,2 \text{ m}$. Dacă lungimea de undă a luminii monocromatice utilizate este în aer $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$, să se calculeze valoarea interfranței.

Care va fi valoarea interfranței, dacă întregul dispozitiv se scufundă în apă? ($n_{\text{apă}} = 4/3$).

$$\mathbf{R: } i_0 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m; } i = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

2.

Un dispozitiv Young este iluminat cu lumină monocromatică. Cunoscând că distanța dintre fante este 1 mm și ecranul este situat la

3 m de fante, să se determine lungimea de undă a radiației utilizate, dacă o celulă fotoelectrică – având catod foarte fin –, care se deplasează în planul de observație, indică intensificări periodice ale fotocurentului pentru poziții distanțate cu 1 mm.

R: 333 nm.

3. Lungimea de undă a radiației cu care este iluminat un dispozitiv Young este $\lambda = 680$ nm. Distanța dintre fante este $l = 2$ mm.

Dacă inițial ecranul se află la distanța $D = 1$ m de fante, la ce distanță trebuie să fie deplasat pentru ca în poziția maximului de ordinul întâi să se găsească maximul de ordinul doi?

R: 0,5 m.

4. Un dispozitiv interferențial este format dintr-o sursă punctiformă monocromatică, având lungimea de undă λ , un paravan în care sunt practicate două fante la distanța l , o lentilă convergentă cu distanța focală f și un ecran situat în planul focal.

Să se exprime mărimea interfranței în funcție de mărimile cunoscute.

R: $i = \lambda f / l$.

5. Două surse, situate într-un plan paralel cu un ecran și la distanța D de acesta, emit unde coerente, cu lungimea de undă λ , defazate cu $\Delta\varphi$. Distanța dintre surse este l .

Cu ce diferență de drum ajung razele într-un punct de pe ecran aflat pe axa de simetrie a sistemului?

R: $\delta = \frac{\lambda \Delta\varphi}{2\pi}$.

6. Un dispozitiv Young utilizează o radiație monocromatică. Să se determine raportul dintre intensitatea luminoasă a punctelor de pe ecran corespunzătoare unui maxim, și respectiv, a unui punct situat la o treime din distanța dintre maxim și minimul următor.

R: 4/3.

7. Un dispozitiv Young este iluminat cu o radiație monocromatică. Care este raportul dintre intensitatea luminoasă în punctele de pe ecran corespunzătoare maximelor luminoase și intensitatea în punctele de pe ecran aflate la o distanță de aceste maxime egală cu a treia parte din interfranță?

R: 4.

8. O radiație monocromatică ($\lambda = 550$ nm) luminează un sistem de două fante, una dintre ele fiind acoperită cu un strat de mică ($n = 1,58$),

pe care fasciculul cade perpendicular. În punctul central de pe ecran se găsește a șaptea franjă luminoasă. Să se determine grosimea stratului de mică.

R: 6,6 μm .

9.

Diferența drumurilor optice a două unde luminoase de aceeași lungime de undă, $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, care se întâlnesc într-un punct, este $\delta = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Ce se observă în locul întâlnirii?

R: un maxim de ordinul 5.

10.

În drumul uneia dintre razele care interferă se introduce o lamă transparentă de grosime $g = 10^{-5} \text{ m}$ și indice de refracție $n = 1,5$. Cele două surse coerente sunt fantele practicate în paravanul dintr-un dispozitiv Young, depărtate cu $l = 3,3 \text{ mm}$, paravanul găsimdu-se la distanța $D = 3 \text{ m}$ de ecran. Să se calculeze cu cât se deplasează figura de interferență.

R: 4,5 mm.

11.

Un tub transparent, de lungime L , umplut cu clor, se introduce în drumul uneia dintre razele care interferă într-un dispozitiv Young. Radiația monocromatică are lungimea de undă λ . Stiind că introducerea tubului deplasează sistemul de franje cu N interfranje, să se exprime indicele de refracție al clorului în funcție de mărimile cunoscute.

$$\mathbf{R:} \quad n = \frac{N\lambda}{L} + 1.$$

12.

Se luminează cele două fante ale unui dispozitiv Young simultan cu două radiații monocromatice. Lungimea de undă a uneia dintre radiații este egală cu $6000 \text{ \AA}$. Să se determine lungimea de undă a celei de-a doua radiații, dacă maximum de ordinul 3 al acesteia coincide cu maximum de ordinul 2 al primei radiații. Să se precizeze în ce parte a spectrului se află.

R: 4000 $\text{\AA}$ (violet).

3.3.1. Alte dispozitive interferențiale*

Pentru obținerea a două surse coerente prin metoda divizării frontului de undă, mai cunoaștem și alte dispozitive interferențiale pe lângă dispozitivul Young.

1. Oglinzile Fresnel

Construcția dispozitivului

Dispozitivul interferențial numit „Oglinzile Fresnel” este un sistem format din două oglinzi plane, unghiul format de ele fiind foarte mare, aproape de 180° . Ele dau două imagini virtuale ale izvorului punctiform S (sau ale unei fante iluminate, paralele cu muchia comună a oglinzilor).

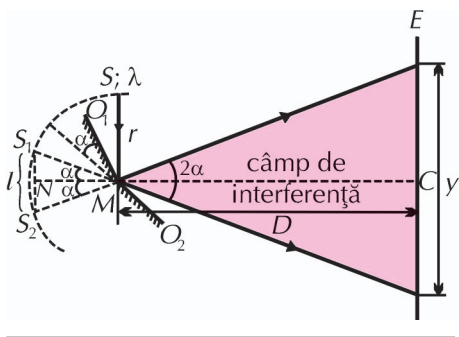


Fig. 3.8 Oglinzile Fresnel.

Din figura 3.8, rezultă:

$$\frac{y}{2} = D \tan \alpha \Rightarrow y \approx 2D\alpha,$$

$$i = \frac{\lambda(D+r)}{l} = \frac{\lambda(D+r)}{2\alpha r},$$

întrucât $l = 2\alpha r$ (din geometria figurii).

Numărul de franje este:

$$N = \frac{y}{i}.$$

2. Bilentilele Billet

Construcția dispozitivului

Dispozitivul interferențial format din cele două jumătăți ale unei lentile, puțin înclinată una față de alta, care dau două imagini reale ale unei surse S (fig. 3.9, a) poartă numele de bilentilele Billet.

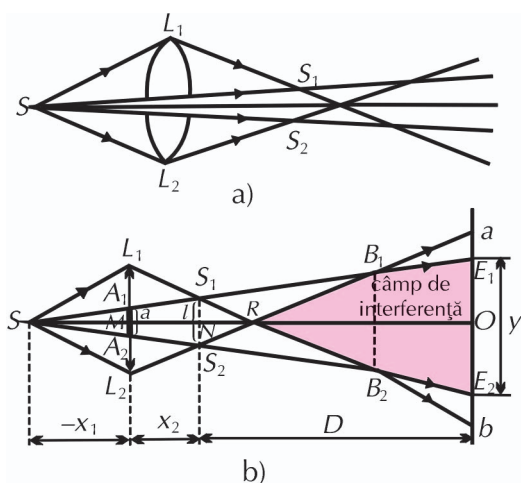


Fig. 3.9 Bilentilele Billet.

Schematic, dispozitivul este redat de figura 3.9, b.

Conform definiției interferanței, cunoscute de la dispozitivul Young, în care cele două fante sunt imaginile reale ale sursei S , valoarea interferanței se calculează cu relația:

$$i = \frac{\lambda D}{l},$$

unde l este distanța dintre cele două imagini reale ale sursei. S-a notat cu a distanța dintre cele două jumătăți ale lentilei.

Din asemănarea celor două triunghiuri A_1A_2S și S_1S_2S , rezultă:

$$\frac{l}{a} = \frac{-x_1 + x_2}{-x_1}.$$

3. Oglinda Lloyd

O oglindă plană AB , așezată ca în figura 3.10, formează imaginea virtuală S' a sursei S .

Cele două surse coerente sunt sursa și imaginea ei virtuală. Într-un punct P de pe ecran interferează unda SP care vine direct de la sursă cu cea reflectată

de oglindă, care poate fi considerată că vine de la sursa virtuală, deci $S'P$. Datorită reflexiei pe oglindă, între cele două raze care interferă există o diferență de drum de $\lambda/2$, ce introduce o diferență de fază de π . Deci, cu oglinda lui Lloyd, franja centrală este o franjă de minim.

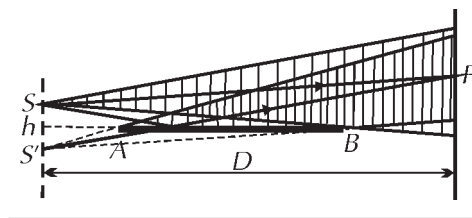


Fig. 3.10 Oglinda Lloyd.

Dacă sursa S se află la distanța h de oglindă, distanța dintre sursele coerente este $2h$ și interfranja este dată de relația:

$$i = \frac{\lambda D}{2h}.$$

4. Biprisma Fresnel

Construcția dispozitivului

Biprisma Fresnel este dispozitivul interferențial alcătuit din două prisme identice cu secțiunea în formă de triunghi dreptunghic, de unghi refringent mic A și indice de refracție n , cu bazele comune.

În realitate ele formează o singură prismă optică având forma din figura 3.11.

Biprisma formează două imagini virtuale S_1 și S_2 ale sursei S , care constituie cele două surse secundare coerente.

Ca și în cazul dispozitivului Young, interfranja va avea expresia:

$$i = \frac{\lambda(d + D)}{l}.$$

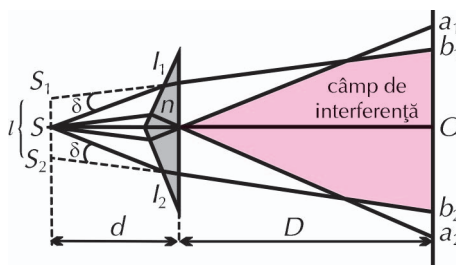


Fig. 3.11 Biprisma Fresnel.

Pentru a găsi expresia lui l , corespunzătoare acestui dispozitiv, vom folosi formulele prisme ținând cont că unghiul A și δ sunt foarte mici și sinusul, cosinusul sau tangenta acestor unghiuri pot fi aproximare cu unghiurile exprimate în radiani.

Din figură se observă că $l \approx d\delta$.

δ este *unghiul de deviație* dintre direcția razei emergente și direcția razei incidente și este egal cu:

$$\delta = i + i' - A.$$

De asemenea: $\sin i = n \sin r \rightarrow i = nr$;

$$\sin i' = n \sin r' \rightarrow i' = nr';$$

în concluzie:

$$\delta = n(r + r') - A = A(n - 1).$$

Rezultă, pentru expresia interfranței date de biprismă Fresnel:

$$i = \frac{\lambda(d + D)}{dA(n - 1)}.$$

Probleme propuse

3

1. Planele celor două oglinzi dintr-un dispozitiv Fresnel fac un unghi $\alpha = 0,001$ rad. La distanța $r = 60$ cm de muchia comună a celor două oglinzi se află o sursă punctiformă. Ecranul pe care se observă franjele de interferență se află la distanța $D = 2,4$ m de intersecția celor două oglinzi. Care este lungimea de undă a luminii utilizate, dacă pe distanța $y = 12$ mm sunt repartizate $N = 10$ franje?

R: 0,48 μm .

2. Să se calculeze distanța dintre cele două imagini reale, formate de bilentile Billet având distanța focală $f = 0,5$ m. Distanța dintre cele două jumătăți ale lentilei este $a = 10^{-3}$ m, iar sursa S este așezată la distanța $x_1 = -1$ m față de ele.

R: 2 mm.

3. Să se calculeze valoarea interfranței din figura de interferență dată de biprismă Fresnel. Se cunosc $\lambda = 589$ nm, $D = 10$ m, $d = 1$ m, unghiul refringent al prisme $A = 0,0175$ rad și indicele de refracție al prisme $n = 1,5$.

R: 0,74 mm.

3.4. Interferența localizată. Aplicații

Interferența localizată este interferența undelor unor surse coerente obținute prin divizarea amplitudinii.

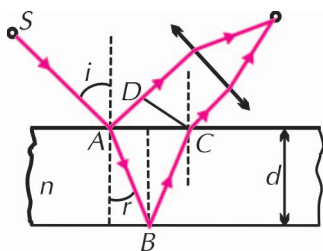


Fig. 3.12

Interferența în lumină reflectată.

1. Lama cu fețe plan-paralele

Dacă lumina cade pe o lamă subțire, transparentă, fasciculele reflectate pe fața superioară și inferioară vor da, prin interferență, un sistem de franje *localizate*.

Vom considera că lama este mai refringentă decât mediul în care se află. Dacă lama este amplasată în aer, indicele de refracție al lamei este $n > 1$.

Diferența de drum optic dintre cele două raze care interferă (interferență în lumină reflectată, fig. 3.12) este:

$$\delta = n(AB + BC) - (AD - \lambda/2)$$

(După cum știm, reflexia pe o suprafață mai refringentă are loc cu o pierdere de semiundă).

Pe figură se observă că:

$$AB = BC = \frac{d}{\cos r} \Rightarrow AB + BC = \frac{2d}{\cos r};$$

$$AC = 2d \cdot \operatorname{tgr}; AD = AC \sin i = 2d \cdot \operatorname{tgr} \cdot \sin i.$$

Rezultă pentru δ :

$$\delta = \frac{2nd}{\cos r} - 2d \frac{\sin r}{\cos r} \sin i + \frac{\lambda}{2}.$$

Întrucât:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \Rightarrow \delta = \frac{2nd}{\cos r} (1 - \sin^2 r) + \frac{\lambda}{2}.$$

Deci, diferența de drum optic la interferența în lumină reflectată, într-o lamă cu fețe plan-paralele este:

$$\delta = 2nd \cos r + \frac{\lambda}{2}. \quad (3.14)$$

În cazul incidenței normale ($i = 0$), $r = 0$ și $\cos r = 1$:

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}. \quad (3.15)$$

Probleme propuse

1.

1. Să se arate că, în cazul în care lama este mai puțin refringentă decât mediul în care se află, pierderea de semiundă se face pe cea de-a doua față și:

$$\delta = 2nd \cos r - \frac{\lambda}{2}. \quad (3.16)$$

2.

2. Să se arate că diferența de drum, la interferența prin lumină transmisă (fig. 3.13), este:

$$\delta = 2nd \cdot \cos r, \quad (3.17)$$

în cazul în care lama este mai refringentă decât mediul în care se află, de exemplu, când acesta este aerul cu indicele de refracție egal cu 1.

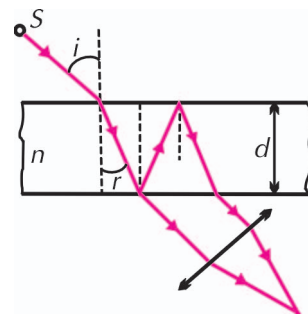


Fig. 3.13 Interferența în lumină transmisă.

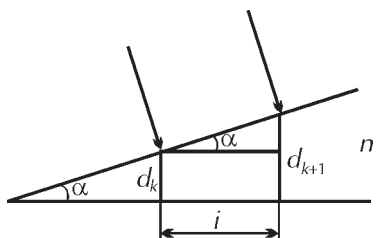


Fig. 3.14 Determinarea interfranței la o figură de interferență dată de o pană optică.

2. Pana optică

Pana optică este o lamă de grosime neuniformă.

Diferența de drum depinde de grosimea lamei în punctul de incidență.

Cele două suprafețe ce delimitează lama subțire fac un unghi α între ele (fig. 3.14).

Dacă fasciculul incident este perpendicular pe pană, planul de localizare al franjelor se va afla pe suprafața inferioară a lamei.

Fie d_k grosimea penei pentru care se obține un maxim de ordin k . În acest caz, din relația 3.15, se obține:

$$2nd_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

iar pentru maximul următor:

$$2nd_{k+1} + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda; \quad d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n}.$$

Din figură rezultă că:

$$d_{k+1} - d_k = i \tan \alpha \approx i\alpha \quad (\text{pentru unghiuri mici ale penei}).$$

Deci:

$$i\alpha = \frac{\lambda}{2n} \Rightarrow i = \frac{\lambda}{2\alpha n}. \quad (3.18)$$

Poziția planului figurii de interferență depinde de unghiul de incidență al fasciculului pe pană.

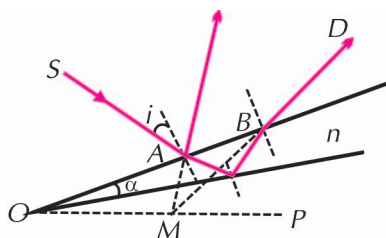


Fig. 3.15 Incidența nu este normală.

În cazul în care incidența nu este normală, figura de interferență se formează în planul OP (fig. 3.15).



O suprafață care nu este perfect plană va prezenta un sistem de franje neregulate, la distanța $\lambda/2$ una de alta (fig. 3.16).

Din forma figurii de interferență, se pot aprecia abateri de la planeitate de ordinul a $0,03 \mu$, fapt folosit la verificarea șlefuirii sticlelor optice.



Fig. 3.16 Deformarea franjelor de egală grosime, datorată abaterilor de la planeitate.

3. Inelele lui Newton

În cadrul dispozitivelor care dau figuri de interferență localizate vom mai studia, pe lângă lama cu fețe plan-paralele și pana optică, un dispozitiv care dă o figură de interferență localizată sub forma unor inele concentrice, alternativ luminoase și întunecate, cunoscută sub numele de **inelele lui Newton** (fig. 3.17)

Dispozitivul cu care se obține această figură de interferență este format dintr-o suprafață plană reflectătoare, deasupra căreia se așază o lentilă plan-convexă cu raza de curbură mare R (fig. 3.18).

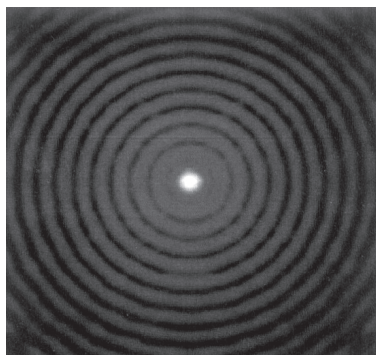


Fig. 3.17 Inelele lui Newton.

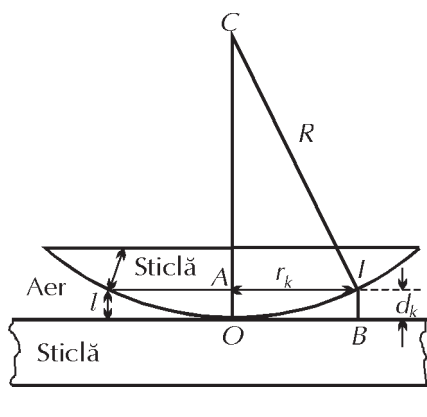


Fig. 3.18

Dispozitivul pentru formarea inelelor lui Newton.

Între lentilă și suport se realizează o pană de aer a cărei pantă este continuu crescătoare, începând din punctul de contact O dintre suprafața sferică și cea plană.

Starea de interferență prin reflexie în punctul B depinde de grosimea penei, d_k , în acel punct:

$$\delta = 2nd_k \cos r - \lambda/2.$$

Fiind pană de aer ($n = 1$) și la incidență normală,

$$\delta = 2d_k - \lambda/2.$$

În punctul B se va obține maxim de interferență dacă $2d_k - \lambda/2 = k\lambda$ și minim de interferență dacă:

$$2d_k - \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

În punctul de contact O , $d = 0$ și rezultă o diferență de drum de $\lambda/2$; prin urmare, franja centrală este un minim.

Dacă suportul este o lamă transparentă, maximum central în lumină transmisă este luminos, deoarece:

$$\delta = 2nd_k, \text{ pentru } n = 1, d_k = 0 \rightarrow \delta = 0.$$

În triunghiul ACI din figura 3.18 se observă că:

$$(R - d_k)^2 + r_k^2 = R^2.$$

Se obține: $r_k^2 = d_k(2R - d_k) \approx 2Rd_k$, ținând seama de faptul că $d_k \ll R$.

Pentru a obține expresia razei inelului luminos de ordin k , impunem condiția de maxim.

Din relația de mai sus s-a obținut că:

$$d_k = \frac{r_k^2}{2R}.$$

Înlocuind în condiția de maxim:

$$\frac{r_k^2}{R} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

se obține pentru raza inelului luminos de ordin k , r_{ki} :

$$r_{ki} = \sqrt{\frac{(2k+1)\lambda R}{2}}, \quad (3.19)$$

unde: $k = 0, 1, 2, \dots$

În același mod, impunând condiția pentru minim:

$$\frac{r_k^2}{R} - \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

rezultă pentru inelul întunecat de ordin k , r_{ki} :

$$r_{ki} = \sqrt{(k+1)\lambda R}, \quad (3.20)$$

unde: $k = 0, 1, 2, \dots$

Probleme rezolvate

1. O peliculă subțire, transparentă, de grosime $d = 0,5 \mu\text{m}$, cu indicele de refracție $n = 1,5$, este iluminată cu lumină albă, lungimile de undă extreme fiind $\lambda_m = 380 \text{ nm}$ și $\lambda_M = 760 \text{ nm}$. Ce culoare va avea pelicula când este privită sub unghiul de reflexie corespunzător incidenței normale?

Rezolvare

Impunem condiția de maxim pentru incidență normală la interferența printr-o lamă subțire:

$$2nd + \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Pentru lungimea de undă rezultă:

$$\lambda = \frac{4nd}{2k-1}.$$

Să vedem pentru ce valoare a lui k lungimea de undă se încadrează între limitele impuse.

$$k = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-7} = 30 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 3000 \cdot 10^{-9} = 3000 \text{ nm};$$

$$k = 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{30}{3} \cdot 10^{-7} = 10 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 1000 \cdot 10^{-9} = 1000 \text{ nm};$$

$$k = 3 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{30}{5} \cdot 10^{-7} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \cdot 10^{-9} = 600 \text{ nm};$$

$$k = 4 \Rightarrow \lambda_4 = \frac{30}{7} \cdot 10^{-7} = 4,28 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 428 \cdot 10^{-9} = 428 \text{ nm};$$

$$k = 5 \Rightarrow \lambda_5 = \frac{30}{9} \cdot 10^{-7} = 3,33 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 333 \cdot 10^{-9} = 333 \text{ nm}.$$

Prin urmare, radiațiile cu lungimile de undă egale cu 600 nm, respectiv 428 nm, determină culoarea peliculei.

2. Un fascicul de lumină monocromatică, având lungimea de undă $\lambda = 5000 \text{ Å}$, cade sub incidență normală pe o pană optică cu indicele de refracție $n = 1,5$. Pe suprafața penei se formează 10 franje luminoase și 9 franje întunecate. Cu cât variază grosimea penei în acest interval de franje?

Rezolvare

Condiția de maxim pentru a 10-a franjă și prima franjă luminoasă, se va scrie:

$$2nd_{10} + \frac{\lambda}{2} = 10\lambda \Rightarrow 2nd_{10} = \frac{19\lambda}{2};$$

$$2nd_1 + \frac{\lambda}{2} = \lambda \Rightarrow 2nd_1 = \frac{\lambda}{2}.$$

Deci:

$$2n(d_{10} - d_1) = \frac{19}{2}\lambda - \frac{\lambda}{2} = 18\frac{\lambda}{2} = 9\lambda.$$

Prin urmare:

$$2 \cdot \frac{3}{2} (d_{10} - d_1) = 3\Delta d = 9\lambda,$$

de unde rezultă:

$$\Delta d = 3\lambda = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 15 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 1,5 \text{ } \mu\text{m}.$$

Probleme propuse

1.

Pe o peliculă având $n = 1,4$ cade, sub incidență normală, un fascicul de lumină albă. Pentru ce grosime minimă culoarea peliculei, prin transmisie, va fi roșie? ($\lambda_R = 670 \text{ nm}$).

$$\mathbf{R:} \approx 0,24 \text{ } \mu\text{m}.$$

2.

Instrumentele optice conțin componente (lentile) care funcționează în transmisie. Pentru înlăturarea reflexiilor nedorite, aceste suprafețe se acoperă cu pelicule subțiri de materiale dielectrice.

Care trebuie să fie grosimea minimă a unei astfel de pelicule pentru a se produce un minim de interferență, dacă lumina monocromatică

având $\lambda = 5600 \text{ \AA}$ cade normal pe suprafața peliculei și indicele de refracție al materialului este $n = 1,4$?

R: $0,1 \text{ }\mu\text{m}$.

3.

Un fascicul de lumină cu $\lambda = 630 \text{ nm}$ cade, sub incidență normală, pe o pană optică având indicele de refracție $n = 1,5$. Pe suprafața penei se formează 8 franje luminoase și 7 franje întunecate. Cu cât variază grosimea penei pe acest interval de franje?

R: $\approx 1,6 \text{ }\mu\text{m}$.

4.

O pană optică formată dintr-un material optic transparent, cu indicele de refracție $n = 1,5$, este iluminată normal cu radiația monocromatică de lungime de undă $\lambda = 600 \text{ nm}$. Știind că interfranja figurii de interferență formate este $i = 0,5 \text{ nm}$, să se determine unghiul penei.

R: $4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.

5.

O radiație monocromatică având $\lambda = 660 \text{ nm}$ cade, sub incidență normală, pe o pană optică. Numărul de franje pe 1 cm este 10. Să se determine unghiul penei, știind că $n = 1,5$.

R: $2,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$.

6.

O pană de aer formată din două plăci plan-paralele de sticlă este iluminată normal, pe una dintre fețe, cu o radiație monocromatică de lungime de undă λ .

Să se determine ordinul de interferență, k , al franjei luminoase pentru locul de pe pana optică în care s-ar forma franja luminoasă de ordinul $(k + 5)$, dacă s-ar folosi lumina cu lungimea de undă λ_1 .

R: $k = \frac{11\lambda_1 - \lambda}{2(\lambda - \lambda_1)}$.

7.

O radiație cu lungimea de undă egală cu 670 nm cade normal pe un dispozitiv care formează inelele lui Newton. Să se determine raza de curbură a lentilei sferice, dacă raza inelului întunecat de ordin 20 este egală cu $2,5 \text{ cm}$.

R: $44,4 \text{ m}$.

3.5. (*) Difracția luminii

Propagarea rectilinie a luminii explică formarea umbrei. În cazul în care se plasează un ecran, E , în spatele unei deschideri mai mari, AB , practicate într-un paravan, ne așteptăm ca pe ecran să fie iluminată numai porțiunea $A'B'$ (fig. 3.19, a). Din experiență, se constată că la marginea porțiunii luminoase apar niște maxime și minime slabe, ca și cum lumina ar fi pătruns în regiunea umbrei

prin „curbarea” razelor de lumină (fig. 3.19). Pe măsură ce deschiderile se micșorează, ajungând niște fante înguste, pe ecran se observă o figură formată dintr-un maxim central larg, mărginit de maxime și minime laterale de intensitate din ce în ce mai mică.

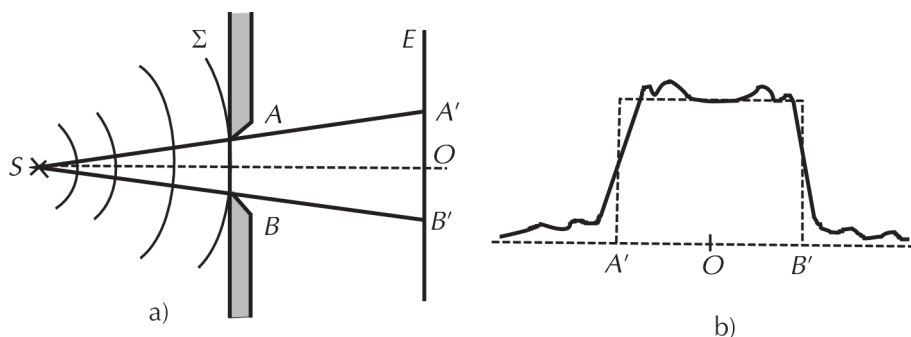


Fig. 3.19

Difrakția printr-o singură fantă dreptunghiulară.
a – geometria aranjamentului sursă-fantă; b – intensitatea luminii pe ecran.

Definiție

Fenomenul de ocolire aparentă, de către undele luminoase, a obstacolelor ale căror dimensiuni sunt comparabile cu lungimea de undă a luminii incidente se numește difracție.

Figura care se formează pe ecran este o *figură de difracție*.

Fenomenul este explicat de principiul Huygens-Fresnel; marginile fantei atinse de unda incidentă devin surse de noi unde secundare coerente, care interferează și dau pe ecran o figură de difracție.

Ne vom referi la *difrakția Fraunhofer*, difracție obținută pentru fasciculele de lumină paralele.

Deoarece sursele, fantele și ecranul se găsesc la distanțe finite, între sursă și paravanul în care se practică fanta, precum și între paravan și ecran se intercalează lentile convergente care transformă fasciculul incident în fascicul paralel și concentrează fasciculul difractat în planul lor focal.

Analizăm cazul *difrakției printr-o singură fantă dreptunghiulară* (fig. 3.20).

Sursa S este plasată în planul focal al lentilei L_1 ; din L_1 fasciculul de raze iese paralel și cade sub incidență normală ($i = 0$) pe fanta dreptunghiulară AB, de lățime d . Fasciculul este strâns în punctul P de pe ecranul E, care se află în planul focal al lentilei L_2 . Din figură, se observă că diferența de drum, δ , dintre cele două raze, este:

$$\delta = d \sin \alpha \approx d\alpha,$$

unde α este unghiul foarte mic de difracție.

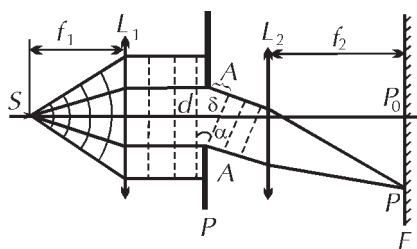


Fig. 3.20

Difrakția luminii pe o fantă dreptunghiulară.

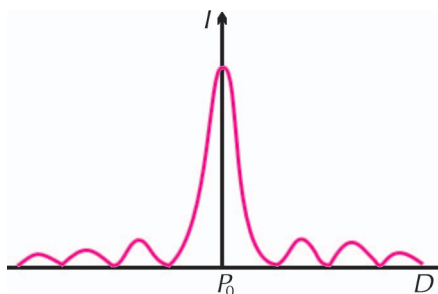


Fig. 3.21

Distribuția intensității luminoase în funcție de distanță în figura de difracție.

Diferența de fază între undele difractate pe marginile fantei va fi:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \approx \frac{2\pi}{\lambda} d\alpha.$$

Pentru $\alpha = 0 \rightarrow \Delta\varphi = 0$, astfel încât în punctul P_0 se formează un maxim central.

Experimental, se constată că lărgimea maximelor este invers proporțională cu lărgimea fantei și că intensitatea maximelor scade pe măsura îndepărtării de maximul central (fig. 3.21).

Poziția maximelor și a minimelor depinde de lungimea de undă. Pentru lumina albă, maximul central va fi alb, iar maximele secundare vor fi colorate, cele cu lungimi de undă mai mici fiind mai apropiate de maximul central.

În cazul unei **deschideri circulare în ecran**, pe figura de difracție se formează o pată centrală luminoasă, înconjurată de inele întunecate și luminoase. Și în acest caz intensitatea inelelor luminoase scade pe măsura îndepărtării de pata luminoasă centrală, dar mult mai rapid decât în cazul franjelor obținute cu fante dreptunghiulare.

Figura 3.22 redă figura de difracție obținută cu fantă dreptunghiulară (a) și, figura de difracție obținută cu deschidere circulară (b).

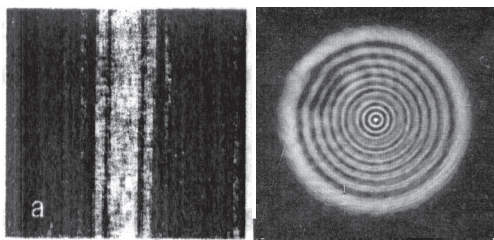


Fig. 3.22

Figura de difracție formată de:
a – o fantă dreptunghiulară;
b – o deschidere circulară.

3.6. (*) Rețeaua de difracție. Aplicații

Pentru două fante de lărgime a , separate de intervalul opac b , distanța dintre două margini omoloage ale fantelor va fi $d = a + b$ (fig. 3.23).

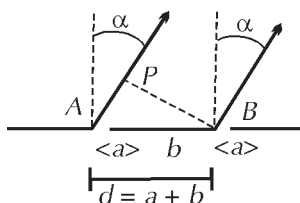


Fig. 3.23

Difracția pe două fante dreptunghiulare.

Definiție

Un număr mare de fante fine, paralele, egale ca lărgime și echidistante, situate în același plan, formează o **rețea de difracție** (sau rețea optică).

Ea se obține prin trasarea unor zgârieturi, numite **trăsăturile rețelei**, pe o placă transparentă.

Zgârieturile sunt porțiunile opace dintr-o rețea de difracție care separă porțiunile transparente.

Rețeaua de difracție pe o suprafață transparentă este o *rețea prin transmisie*.

Numărul de trăsături, N , pe unitatea de lungime, L , este:

$$\frac{N}{L} = \frac{1}{d},$$

unde:

$$d = \frac{L}{N}$$

se numește *constanta rețelei de difracție*.

Difracția pe o rețea optică este ilustrată în figura 3.24.

Când razele incidente și difracțate sunt de aceeași parte a normalei la rețea, diferența de drum dintre două raze difracțate pe două fante (fig. 3.24, b) este:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = d(\sin i + \sin \alpha). \quad (3.26)$$

Dacă razele incidente sunt de o parte a normalei, iar cele difracțate de cealaltă parte (fig. 3.24, a), diferența de drum este:

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = d(\sin i - \sin \alpha). \quad (3.27)$$

În cele două puncte P , simetrice față de maximul central, se vor obține maxime prin interferența undelor secundare coerente dacă:

$$d(\sin i \pm \sin \alpha_k) = k\lambda. \quad (3.28)$$

Ordinul maxim de difracție, $k_{\max}$, se obține în cazul în care $\alpha = \pi/2$, adică $\sin \alpha = 1$:

$$d(\sin i \pm 1) = k_{\max} \lambda. \quad (3.29)$$

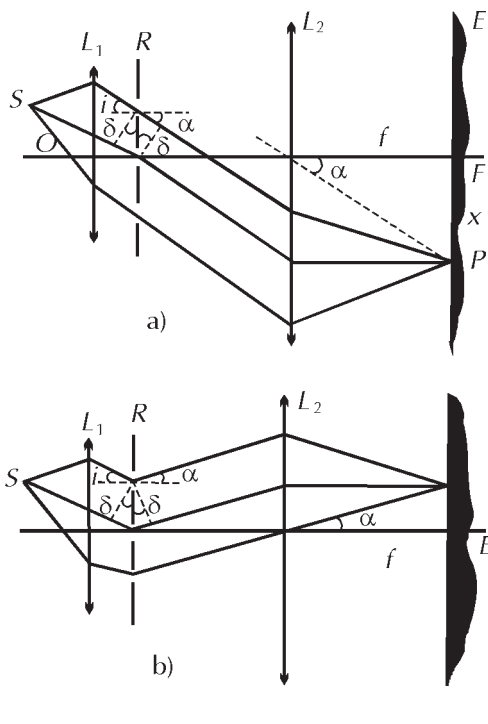


Fig. 3.24

Difracția pe rețeaua optică.

3.6.1. Aplicații

1. Determinarea lungimii de undă a unei radiații monocromatice cu ajutorul rețelei de difracție.

În cazul incidenței normale pe rețeaua de difracție $i = 0$ și atunci:

$$d \sin \alpha_k = k\lambda.$$

Din figura 3.24:

$$x = f \tan \alpha \approx f \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{x}{f},$$

pentru unghiuri de difracție mici.

$$\text{Rezultă: } \frac{dx}{f} = k\lambda,$$

$$\text{de unde: } \lambda = \frac{dx}{kf}. \quad (3.30)$$

2. Puterea separatoare

Una dintre caracteristicile optice importante ale instrumentelor optice (lunetă, microscop, aparat fotografic, spectroscop, spectrograf ș.a.) sau a unor materiale fotosensibile (film, placă spectrală, hârtie fotografică ș.a.) este puterea separatoare.

3

Definiție

Puterea separatoare (sau de rezoluție) a unui instrument optic sau a unui material fotosensibil este capacitatea acestuia de a pune în evidență, separat, două puncte vecine.

Puterea separatoare a unui aparat spectral este dată de relația:

$$P = \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Fenomenul de difracție limitează puterea de rezoluție, adică posibilitatea aparatelor spectrale și a instrumentelor optice de a separa două radiații monocromatice de lungimi de undă foarte apropiate sau două puncte foarte apropiate.

Conform unui criteriu dat de *Rayleigh*, două radiații, cu lungimi de undă apropiate, mai pot fi separate dacă maximul de difracție de un anumit ordin, pentru una din cele două radiații, se suprapune peste primul minim ce însoțește maximul de același ordin a celeilalte radiații.

Aparatele spectrale sunt destinate observării directe a spectrelor, folosind ca receptor ochiul sau plăci fotosensibile din care se obțin înregistrări fotografice ale acestora. În primul caz, ele se numesc spectroscopae, iar în al doilea caz, spectrografe.

Aparatele spectrale pot fi cu rețele sau cu prisme.

La aparatele spectrale cu rețele (de difracție), puterea separatoare este:

$$P = \frac{\lambda}{d\lambda} = kN,$$

unde k este maximul de ordin k și N – numărul total de trăsături ale rețelei folosite.

La aparatele spectrale cu prismă, puterea separatoare depinde de mărimea bazei prisme, deci de dispersia prisme.

Puterea separatoare a instrumentelor optice este condiționată de diafragmele introduse în instrumentele optice (deschideri circulare pe care are loc fenomenul de difracție).

Asemănări și deosebiri între figura de interferență și figura de difracție

- Orice fenomen de difracție este însoțit de un fenomen de interferență.
- Și în figura de interferență și în cea de difracție se formează un maxim central și, simetric, de o parte și de alta a lui, se formează maxime secundare.
- Spre deosebire de figura de interferență, în care intensitatea maximelor secundare este aceeași la orice distanță de maximum central, intensitatea maximelor din figura de difracție scade cu mărirea distanței față de maximum central.

Probleme rezolvate

1. Numărul maxim de franje luminoase ce se poate obține, iluminând normal cu o radiație monocromatică o rețea de difracție cu constanta d , este egal cu N . El nu se schimbă dacă lungimea de undă este mărită cu cel mult $\Delta\lambda$. Să se exprime, în funcție de mărimile cunoscute, lungimea de undă a radiației.

Rezolvare

Din datele problemei, se cunoaște că $i = 0$ și $\alpha = \pi/2$, deci, din relația 3.29:

$$d = k_{\max} \lambda.$$

Numărul maxim de franje luminoase (adică, franja centrală împreună cu franjele luminoase formate de o parte și de alta a franjei centrale) este, prin urmare:

$$N = 2 \left(\frac{d}{\lambda} \right) + 1.$$

Același număr maxim de franje se păstrează dacă lungimea de undă a radiației incidente se mărește cu $\Delta\lambda$. Deci, se poate scrie:

$$N = 2 \frac{d}{\lambda + \Delta\lambda} + 1.$$

Din această relație rezultă pentru lungimea de undă a radiației incidente:

$$\lambda = \frac{2d}{N-1} - \Delta\lambda.$$

2. O prismă cu indicele de refracție $n = \sqrt{3}$, aflată în aer, are secțiunea ABC un triunghi echilateral. Pe fața AB cade o radiație monocromatică, sub unghiul de incidență $i = 60^\circ$, într-un punct, aflat la 2 cm de A .

a) Cunoșcând viteza de propagare a luminii, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, care este timpul în care radiația străbate prisma?

b) La ieșirea din prismă, radiația cade pe o rețea de difracție perpendiculară pe baza prisme. Care este constanta rețelei de difracție, dacă ordinul maxim al spectrului de difracție obținut este $k_{\max} = 5$ și $\lambda = 600$ nm?

c) Imaginea de difracție se formează în planul focal al unei lentile paralele cu rețeaua. Cunoscând unghiul de difracție $\alpha = 5^\circ$, calculați distanța focală a lentilei, știind că distanța dintre maximumul central și maximumul de ordinul $k = 1$ este $x = 2$ cm.

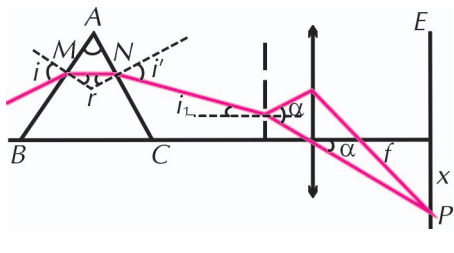


Fig. 3.25

Rezolvare

Din enunț: $A = 60^\circ$, $i = i'$, deci:
 $MN = AM = 2 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

$$a) t = \frac{MN}{v};$$

$$\text{dar } v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

$$\text{deci: } t = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3} \cdot 10^8} = 0,116 \text{ ns}.$$

b) Unghiul de incidență pe rețeaua de difracție este $i_1 = 30^\circ$.

Înlocuind în relația 3.29, se obține:

$$d(\sin 30^\circ + \sin 90^\circ) = 5 \cdot 6 \cdot 10^{-7},$$

adică: $d = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2 \mu\text{m}$.

c) Din relația:

$$x = f \tan \alpha \approx f \alpha,$$

întrucât unghiul α este foarte mic, rezultă:

$$f = x/\alpha.$$

Să-l exprimăm pe α în radiani:

$$\pi \text{ rad} \dots\dots\dots 180^\circ$$

$$\alpha \text{ rad} \dots\dots\dots 5^\circ$$

$$\alpha = \pi/36 \text{ rad}.$$

Înlocuind numeric, se obține pentru f :

$$f = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\frac{\pi}{36}} = 22,93 \cdot 10^{-2} \text{ m} \approx 23 \text{ cm}.$$

3. Pe o rețea de difracție cu $d = 3,6 \mu\text{m}$, cade normal un fascicul paralel de lumină, format din două radiații cu lungimi de undă diferite, $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$ și $\lambda_2 = 400 \text{ nm}$. Să se determine ordinul de difracție k al maximumului radiației cu lungimea de undă λ_1 , care se suprapune pe ecran peste ordinul $(k + 1)$ al maximumului radiației cu lungimea de undă λ_2 . Câte astfel de suprapuneri au loc?

Rezolvare

Pentru cele două radiații, la incidență normală ($i = 0$), pe aceeași rețea:

$$\left. \begin{array}{l} d \sin \alpha = k \lambda_1 \\ d \sin \alpha = (k + 1) \lambda_2 \end{array} \right\} \Rightarrow k \lambda_1 = (k + 1) \lambda_2 ;$$

$$\frac{k+1}{k} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{600}{400} = \frac{3}{2}, \text{ deci } k = 2.$$

Pentru ordinul maxim de difracție, $k_{\max}$, unghiul de difracție este $\pi/2$. Relațiile pentru aflarea ordinelor maxime de difracție, corespunzătoare celor două radiații, sunt:

$$d = k_{1\max} \lambda_1 \Rightarrow k_{1\max} = \frac{d}{\lambda_1} = \frac{3,6 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-7}} = 6;$$

$$d = k_{2\max} \lambda_2 \Rightarrow k_{2\max} = \frac{d}{\lambda_2} = \frac{3,6 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-7}} = 9.$$

Obținem raportul $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

În concluzie, maximele de difracție pentru λ_2 , de ordinele 2, 4, 6, coincid cu maximele de difracție de ordinele: 3, 6, 9, pentru λ_1 , prin urmare vor exista trei suprapuneri.

3

Probleme propuse

1.

Pe o rețea de difracție cade normal o radiație având lungimea de undă de 2500/4 nm. Franja de difracție de ordin 2 se formează pe ecran la distanța $f/20$ de franja centrală, f fiind distanța focală a lentilei. Câte trăsături pe milimetru are rețeaua?

R: 40 trăsături/mm.

2.

Un fascicul monocromatic, cu lungimea de undă $\lambda = 656,25$ nm, este trimis perpendicular pe o rețea de difracție cu $d = 10,5$ μ m.

Franjele de difracție se formează cu ajutorul unei lentile cu $f = 0,24$ m, pe un ecran așezat în planul focal al lentilei. Să se calculeze:

a) unghiul de deviație față de direcția incidentă a fasciculului pentru maximul de ordinul 8;

b) distanța dintre poziția maximului central și primul maxim observat pe ecran.

R: $\alpha = 30^\circ$; $x = 15$ mm.

3.

O sursă monocromatică punctiformă emite o radiație cu $\lambda = 500$ nm. Sursa se află în planul focal al unei lentile convergente având distanța focală $f = 1$ m, la $h = 1$ cm deasupra axei optice principale.

Fasciculul, refractat prin lentilă, cade pe o rețea de difracție cu 500 trăsături pe milimetru. Care este ordinul cel mai mare al maximului de difracție ce se obține sub axa optică principală?

R: 3.

4. Un fascicul de lumină monocromatică este incident perpendicular pe o rețea de difracție cu 250 trăsături pe milimetru. Razele de lumină, care formează maximul de difracție de ordin 4 sunt înclinate față de direcția razelor incidente cu un unghi de 30° . Să se calculeze lungimea de undă a radiației monocromatice.
R: $5 \cdot 10^{-7}$ m.
5. Un fascicul de radiație monocromatică paralel formează o imagine de difracție cu ajutorul unei lentile cu distanța focală $f = 10$ cm. Constanta rețelei este $d = 1 \mu\text{m}$, iar unghiul de incidență al fasciculului pe rețea, $i = \pi/6$. Maximul de ordinul doi se află la distanța $x = 10$ cm de axa optică principală a sistemului. Care este lungimea de undă a radiației?
R: 603 nm.
6. Un fascicul luminos cade normal pe o rețea de difracție. Maximul de difracție de ordin 2, pentru radiația cu $\lambda_1 = 0,65 \mu\text{m}$, se obține sub unghiul $\alpha_2 = 45^\circ$. Sub ce unghi, α_3 , se va obține maximul de ordin 3, pentru radiația cu $\lambda_2 = 0,5 \mu\text{m}$?
R: $\sin \alpha_3 = 0,81346$.
7. Două radiații luminoase cu lungimile de undă $\lambda_1 = 6250 \text{ \AA}$ și $\lambda_2 = 4166 \text{ \AA}$ cad normal pe o rețea de difracție. Să se calculeze numărul de trăsături pe un milimetru, N , astfel ca maximele celor două radiații să coincidă în direcția $\alpha = 30^\circ$.
R: $N = 400$.

3.7.(*) Polarizarea luminii. Aplicații

Teoria electromagnetică a lui Maxwell a stabilit că *undele electromagnetice sunt unde transversale, iar vectorii câmp electric și câmp magnetic oscilează perpendicular pe direcția de propagare*.

Ne vom referi la componenta electrică, deoarece aceasta impresionează mai puternic ochiul.

Definiție

Dependența amplitudinii vectorului luminos de direcția sa din planul normal la direcția de propagare a undei luminoase constituie proprietatea de polarizare a luminii.

Dacă vectorul intensitate câmp electric, $\vec{E}$, oscilează astfel încât rămâne tot timpul paralel cu o direcție din planul perpendicular pe direcția de propagare, unda este *liniar polarizată* sau *total polarizată*.

În cazul luminii naturale, toate direcțiile din planul perpendicular pe direcția razei sunt echivalente; *lumina naturală este nepolarizată*.

Să presupunem că unda electromagnetică se propagă pe direcția Oz , vectorul $\vec{E}$ fiind în planul xOy (fig. 3.26). El poate fi descompus, în fiecare moment, în două componente: E_x și E_y .

Deci, orice undă transversală este echivalentă cu două unde liniar polarizate pe direcții perpendiculare, care au aceeași frecvență și pot fi defazate cu un unghi φ :

$$E_x = E_{0x} \sin \omega t \Rightarrow \frac{E_x}{E_{0x}} = \sin \omega t ;$$

$$E_y = E_{0y} \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \frac{E_y}{E_{0y}} = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi.$$

Rezultă că:

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \text{ sau } \frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \varphi = \cos \omega t \sin \varphi;$$

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin \varphi = \sin \omega t \sin \varphi.$$

Ridicând ambele relații la pătrat și adunându-le membru cu membru obținem:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \sin^2 \varphi + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{0y}^2} \cos^2 \varphi - \frac{2E_y E_x}{E_{0y} E_{0x}} \cos \varphi = \sin^2 \omega t \sin^2 \varphi + \cos^2 \omega t \sin^2 \varphi.$$

În final:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - \frac{2E_y E_x}{E_{0y} E_{0x}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (3.31)$$

Traietoria descrisă de vârful vectorului $\vec{E}$ este o elipsă ale cărei axe principale nu sunt Ox și Oy (fig. 3.27).

Această undă este *eliptic polarizată*.

În funcție de valorile pe care le iau φ și amplitudinile E_{0x} și E_{0y} , deosebim câteva cazuri particulare:

1) Dacă: $\varphi = \pm(2k+1)\pi/2$, ($k=0, 1, 2, \dots$), ecuația 3.31 devine:

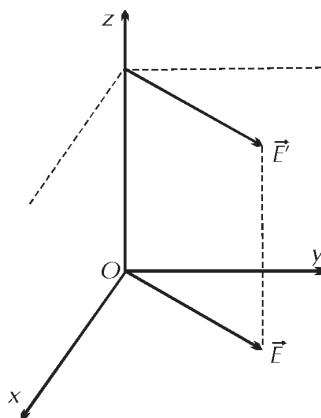


Fig. 3.26

Unda electromagnetică se propagă pe direcția Oz .

3

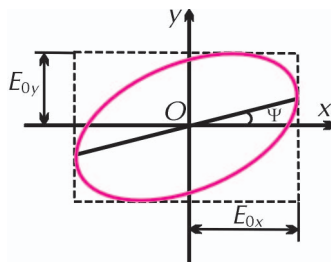


Fig. 3.27

Undă eliptic polarizată.

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1. \quad (3.32)$$

Aceasta este ecuația unei elipse pentru care axele principale sunt Ox și Oy (fig. 3.28).

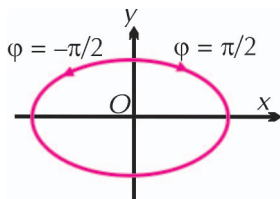


Fig. 3.28 Lumină polarizată eliptic drept și eliptic stâng.

După sensul de rotație a vectorului $\vec{E}$, lumina se numește *polarizată eliptic drept* (rotație în sensul mișcării acelor de ceasornic în jurul normalei la frontul de undă – axa Oz) sau *polarizată eliptic stâng*, în cazul rotației în sens contrar.

$$\text{Dacă } E_{0x} = E_{0y} \Rightarrow \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0x}^2} = 1, \quad (3.33)$$

aceasta fiind ecuația unui cerc, lumina este *circular polarizată*.

2) Pentru $\varphi = 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$),

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - \frac{2E_y E_x}{E_{0y} E_{0x}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{E_x}{E_{0x}} - \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 0.$$

Rezultă:

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x. \quad (3.34)$$

În acest caz, unda este *liniar polarizată* sau total polarizată cu direcția de polarizare paralelă cu dreapta AA (fig. 3.29, a).

Pentru $\varphi = (2k+1)\pi$, se obține (fig. 3.29, b):

$$E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x. \quad (3.35)$$

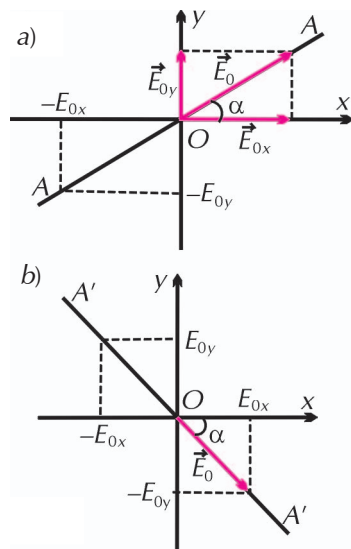


Fig. 3.29 Undă liniar polarizată.

3.7.1. Metode de obținere a luminii polarizate. Legea lui Brewster

1. Polarizarea prin reflexie și refracție

În scopul polarizării prin reflexie și refracție se folosește un *polarizator* – dispozitiv cu ajutorul căruia se obține lumina polarizată dintr-un fascicul de lumină naturală – și un *analizor* – cu ajutorul căruia se verifică starea de polarizare a luminii, utilizând proprietatea acestuia de a lăsa să treacă numai lumina polarizată într-un anumit plan.

Conform schemei din figura 3.30, se trimite un fascicul de lumină naturală pe un mediu transparent P , iar cu ajutorul unui analizor se constată că: la o rotație

completă a analizorului în jurul direcției de propagare, intensitatea luminii reflectate este variabilă, ea trecând prin două maxime și prin două minime. În lumina refractată se constată același lucru, pozițiile minimelor și maximelor fiind inversate.

Înseamnă că unda luminoasă prezintă proprietăți diferite în diferitele direcții perpendiculare pe direcția de propagare, proprietăți pe care le prezintă numai undele transversale.

Descompunând vectorul intensitate câmp electric („vectorul luminos”) după două direcții – una paralelă cu planul de incidență și cealaltă perpendiculară pe el –, definim *gradul de polarizare, P*:

$$P = \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{I_{\perp} + I_{\parallel}}, \quad (1.99)$$

în care $I_{\perp}$ și $I_{\parallel}$ sunt intensitățile celor două componente – perpendiculară, respectiv, paralelă.

Gradul de polarizare ia valori între 0 și 1.

Lumina naturală are gradul de polarizare 0, întrucât $I_{\perp} = I_{\parallel}$.

Gradul de polarizare maxim, egal cu 1, corespunde luminii liniar polarizate sau total polarizate. Ea conține numai vibrațiile perpendiculare pe planul de incidență, $I_{\parallel} = 0$.

Pentru valorile cuprinse între 0 și 1, lumina este parțial polarizată.

Definiție

Unghiul de incidență pentru care direcția de propagare a luminii reflectate este perpendiculară pe direcția de propagare a luminii refractate (fig. 3.31) se numește *unghi Brewster* și se notează i_B .

Unghiul Brewster depinde de natura materialului reflectător.

Lumina reflectată este total polarizată

dacă:

$$i_B + r = \pi/2. \quad (3.36)$$

Scriem legea refracției:

$$\frac{\sin i_B}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ dar: } r = \pi/2 - i_B;$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right)} = \frac{\sin i_B}{\cos i_B}.$$

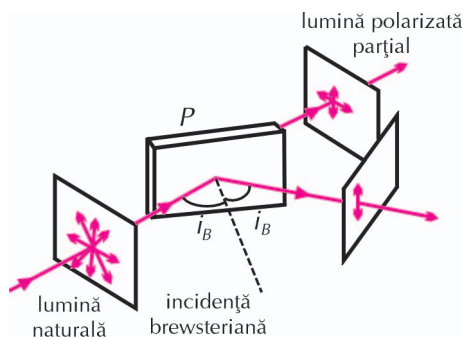


Fig. 3.30 Polarizarea luminii prin reflexie și refracție.

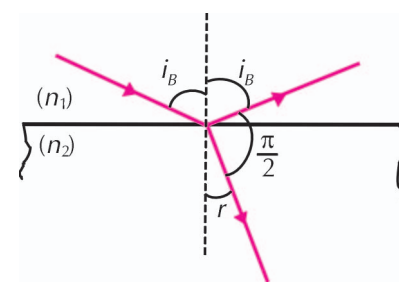


Fig. 3.31 Legea Brewster.

Legea Brewster este exprimată de relația:

$$\operatorname{tg} i_B = n_2/n_1. \quad (3.37)$$

În cazul când lumina este total polarizată, minimele observate prin rotirea analizorului devin nule.

Concluzie: dacă lumina incidentă este nepolarizată, prin reflexie se poate obține lumină total polarizată, iar prin refracție, lumină parțial polarizată, dar mai intensă decât cea reflectată.

Metoda de polarizare prin reflexie este folosită rar, prezentând următoarele dezavantaje:

- intensitatea luminii polarizate este mai mică decât intensitatea luminii incidente;
- fasciculele obținute nu sunt suficient de bine colimate.

3

2. Fenomenul de birefrință sau dublă refracție

Dacă pe un cristal de spat de Islanda (CaCO_3) cade un fascicul îngust de lumină, în cristal apar două raze refractate pe direcții diferite, care, după ieșirea din cristal, vor fi paralele cu direcția fasciculului incident. Aceste raze se numesc **rază ordinară (o)** și **rază extraordinară (e)**. Înseamnă că acest cristal nu este izotrop din punct de vedere optic, iar indicii de refracție pentru cele două raze sunt diferiți: $n_o \neq n_e$.

Toate cristalele posedă o direcție pentru care $n_o = n_e$ și lumina paralelă cu această direcție nu prezintă fenomenul de birefrință.

Această direcție este **axa optică a cristalului**.

Polarizarea prin birefrință prezintă avantaje importante:

- ambele raze sunt total polarizate;
- întreaga energie a fasciculului incident se regăsește în cele două fascicule refractate.

În construcția dispozitivelor de polarizare a luminii pe baza fenomenului de birefrință se urmărește mărirea divergenței dintre cele două raze sau suprimarea uneia dintre ele.

Un polarizor des folosit este **prisma Nicol**. Este o prismă din spat de Islanda, tăiată după metoda fizicianului englez William Nicol și cunoscută sub numele de „nicol”.

Cele două jumătăți ale prisme sunt lipite cu balsam de Canada, un material al cărui indice de refracție este cuprins între valorile n_o și n_e . Astfel, raza ordinară va fi total reflectată pe stratul de balsam și apoi absorbită de montura nicolului. Raza extraordinară iese din nicol paralelă cu raza incidentă.

O serie de minerale și compuși organici prezintă proprietatea de **dicroism** – adică de a absorbi fie raza ordinară, fie pe cea extraordinară care sunt generate prin fenomenul de birefrință. Polarizorii obținuți pe baza acestei proprietăți au o largă răspândire.

Față de alte dispozitive de polarizare, polarizorii pot produce fascicule de orice lărgime, se montează cu ușurință în orice aparat și sunt relativ ieftini.

Orice dispozitiv de polarizare poate servi și ca analizor.

Polaroizii au multe aplicații. Sunt folosiți la ochelarii de soare, la aparatul fotografic cu polaroid, eliminând lumina „supărătoare”, parțial polarizată, reflectată de suprafețele lucioase ș.a.

Test recapitulativ

3

1. În cazul dispersiei anormale, variația indicelui de refracție cu lungimea de undă este dată de relația:
a) $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; b) $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$; c) $\frac{n_2}{n_1} = \lambda_2 \cdot \lambda_1$.
2. Relația dintre lungimea de undă a radiației roșu, λ_R , și lungimea de undă a radiației galben, λ_G , este:
a) $\lambda_R < \lambda_G$; b) $\lambda_R = \lambda_G$; c) $\lambda_R > \lambda_G$.
3. La o figură de interferență obținută cu dispozitivul Young, distanța dintre maximul central și maximul de ordinul k este:
a) $\frac{k\lambda D}{l}$; b) $\frac{(k+1)\lambda D}{2l}$; c) $\frac{(2k+1)\lambda D}{2l}$.
4. Introducerea unei lame cu fețe plan-paralele în drumul uneia dintre razele care interferă într-un dispozitiv Young:
a) nu modifică interfranja și nu deplasează figura de interferență;
b) nu modifică interfranja, dar deplasează figura de interferență;
c) modifică interfranja, dar nu deplasează figura de interferență.
5. Diferența de drum optic într-o lamă cu fețe plan paralele care se află într-un mediu mai puțin refringent, la incidență normală și la interferență în lumina reflectată, este dată de expresia:
a) $2nd\cos r + \frac{\lambda}{2}$; b) $2nd$; c) $2nd + \frac{\lambda}{2}$.
6. Expresia interfranței pentru figura de interferență obținută cu o pană optică de unghi α și indice de refracție n este:
a) $\frac{\lambda}{2\alpha n}$; b) $\frac{\lambda\alpha}{2n}$; c) $\frac{n\alpha}{\lambda}$.
7. În cazul iluminării penei optice cu un fascicul perpendicular pe fața penei, figura de interferență se formează:
a) pe un plan situat între cele două fețe ale penei;
b) pe fața superioară a penei;
c) pe fața inferioară a penei.

8. Într-un dispozitiv Young, distanța dintre fante și ecran este $D = 0,8$ m, iar distanța dintre fante este $l = 0,4$ mm. Cunoșcând lungimea de undă a radiației emise de sursă, $\lambda = 400$ nm, mărimea interfranței este:
a) 0,4 mm; b) 1 mm; c) 0,8 mm.
9. Pe fața AB a unei prisme ABC , cu unghiul $A = 30^\circ$, cade perpendicular un fascicul de lumină albă. Știind că indicele de refracție pentru lumina roșie este $n_r = 1,51$ și pentru lumina violetă $n_v = 1,531$, unghiul de dispersie al prisme este:
a) $50'$; b) $45'$; c) $60'$.
10. Cum se modifică interfranja într-o figură de interferență obținută cu un dispozitiv Young, în cazul dispersiei normale, dacă acesta este cufundat în apă?
a) nu se schimbă; b) se micșorează; c) crește.
11. O radiație cu lungimea de undă $\lambda = 680$ nm trece din aer în apă. Lungimea de undă a radiației în apă $\left(n_a = \frac{4}{3}\right)$ este:
a) 510 nm; b) 490 nm; c) 500 nm.
12. O radiație cu lungimea de undă $\lambda = 420$ nm cade normal pe o rețea de difracție. Maximul de ordinul 2 se formează la distanța $f/2$ de franja centrală, unde f este distanța focală a lentilei de proiecție. Constanta rețelei de difracție este:
a) $1,65 \mu\text{m}$; b) $1,69 \mu\text{m}$; c) $1,68 \mu\text{m}$.
13. Lumina solară este total polarizată când se reflectă pe un material dielectric cu indicele de refracție $n = \sqrt{3}$. Valoarea unghiului de incidență este:
a) 60° ; b) 45° ; c) 30° .
14. La incidența sub un unghi de 60° , pe o suprafață plană de sticlă, fasciculul este total polarizat. Indicele de refracție al sticlei este:
a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sqrt{3}$.

Rezolvările problemelor

3.3. 1. $i_0 = \frac{\lambda_0 D}{l} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}; i = \frac{i_0}{n} = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$

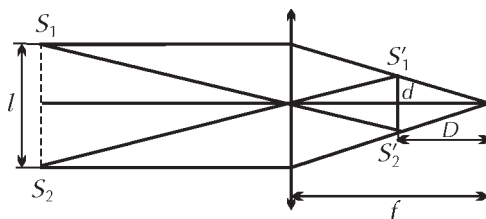
2. $\lambda = \frac{i l}{D} = 333 \text{ nm}.$

3. $x_{1M} = \frac{\lambda D}{l}, x_{2M} = \frac{2\lambda D'}{l} \rightarrow \frac{\lambda D}{l} = \frac{2\lambda D'}{l}; D' = \frac{D}{2} = 0,5 \text{ m}.$

4. Schema aranjamentului este dată de figură.

$i = \frac{\lambda D}{d}; \text{ dar } \frac{d}{l} = \frac{D}{f} \rightarrow \frac{D}{d} = \frac{f}{l} \text{ deci:}$

$i = \frac{\lambda f}{l}.$



5. $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \rightarrow \delta = \frac{\lambda \Delta\varphi}{2\pi}.$ **6.** $\frac{I_{\max}}{I_{\max} \cos^2 \frac{\pi}{i} \cdot \frac{i}{6}} = \frac{4}{3}.$ **7.** $\frac{I_{\max}}{I_{\max} \cos^2 \frac{\pi}{i} \cdot \frac{i}{3}} = 4.$

8. $\Delta x = 7i = \frac{g l}{\lambda} (n-1) \rightarrow g = \frac{7\lambda}{n-1} = 6,6 \mu\text{m}.$ **9.** $\delta = k\lambda \rightarrow k = \frac{\delta}{\lambda} = 5.$

10. $\Delta x = \frac{Dg(n-1)}{l} = 4,5 \text{ mm}.$

11. $Ni = \frac{Li(n-1)}{\lambda} \rightarrow N\lambda = nL - L \rightarrow n = \frac{N\lambda}{L} + 1.$

12. $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 \frac{k_1}{k_2} = 4000 \text{ Å}.$

3.3.1. 1. $\lambda = \frac{i l}{D+r}; l = 2\alpha r; N = \frac{y}{i} \rightarrow i = \frac{y}{N} \rightarrow \lambda = \frac{y 2\alpha r}{D+r} = 0,48 \mu\text{m}.$

2. $\frac{a}{l} = \frac{-x_1}{-x_1 + x_2} \rightarrow l = \frac{a(-x_1 + x_2)}{-x_1}; \frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \rightarrow x_2 = \frac{f x_1}{f + x_1} = 1 \text{ m}.$

3. $i = \frac{\lambda(D+d)}{l} = \frac{\lambda(D+d)}{dA(n-1)}.$

3.4. 1. $2nd = k\lambda; d_{\min} \rightarrow k = 1 \rightarrow 2nd = \lambda; d_{\min} = \frac{\lambda}{2n} \approx 0,24 \mu\text{m}.$

2. $2nd = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \text{ pentru } k = 0 \rightarrow d_{\min} = \frac{\lambda}{4n} = 0,1 \mu\text{m}.$

$$3. 2nd_8 + \frac{\lambda}{2} = 8\lambda \text{ și } 2nd_1 + \frac{\lambda}{2} = \lambda; 2n\Delta d = \frac{16}{2}\lambda - \lambda \rightarrow \Delta d = \frac{15}{6}\lambda = 1,6 \mu\text{m}.$$

$$4. i = \frac{\lambda}{2n\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{2ni} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}.$$

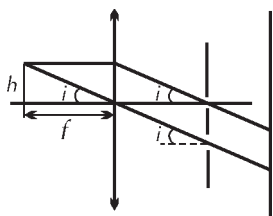
$$5. \alpha = \frac{\lambda}{2ni}; i = \frac{l}{N}; \alpha = \frac{\lambda N}{2nl} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}.$$

$$6. 2nd_k - \frac{\lambda}{2} = k\lambda \rightarrow 2nd_k = k\lambda + \frac{\lambda}{2} \text{ și } 2nd_{k+5} - \frac{\lambda_1}{2} = (k+5)\lambda_1 \rightarrow 2nd_{k+5} = (k+5)\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{2}; 2n(d_{k+5} - d_k) = (k+5)\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{2} - k\lambda - \frac{\lambda}{2} \rightarrow k(\lambda - \lambda_1) = \frac{11\lambda_1 - \lambda}{2} \rightarrow k = \frac{11\lambda_1 - \lambda}{2(\lambda - \lambda_1)}.$$

$$7. r_k^2 = (k+1)R \rightarrow R = \frac{r_k^2}{(k+1)\lambda} = 44,4 \text{ m}.$$

$$3.6. 1. d = \frac{k\lambda f}{x} \rightarrow \frac{1}{d} = \frac{x}{k\lambda f} = 40 \text{ mm}^{-1}.$$

$$2. a) d\sin\alpha = k\lambda \rightarrow \sin\alpha = \frac{k\lambda}{d} = \frac{1}{2}; b) x = \frac{k\lambda f}{d} = 15 \text{ mm}.$$



$$3. \text{ Din figură se vede că } h = f \operatorname{tg} i \rightarrow \operatorname{tg} i = \frac{h}{f} = 0,01;$$

$$\operatorname{tg} i \approx \sin i; d(\sin i - \sin\alpha) = k\lambda;$$

$$k_{\max} = \frac{d(\sin i - 1)}{\lambda} = 3,96 \approx 3.$$

$$4. d\sin\alpha_k = k\lambda; \lambda = \frac{d\sin\alpha_k}{k} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

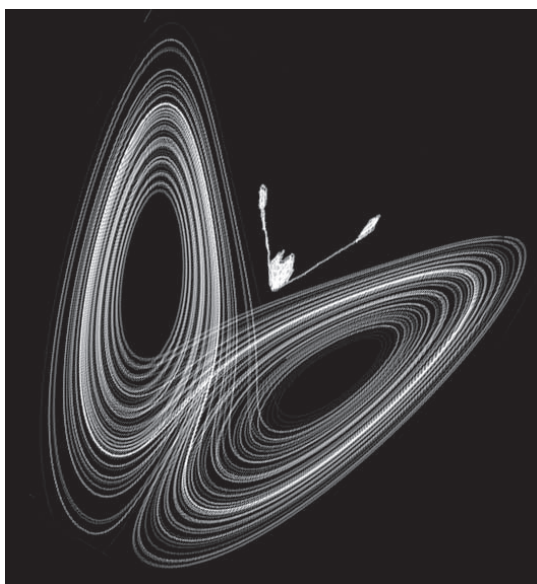
$$5. d(\sin i + \sin\alpha_k) = k\lambda; \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{f} = 1 \rightarrow \sin\alpha_k = \frac{\sqrt{2}}{2}; \lambda = \frac{d(\sin i + \sin\alpha_k)}{k} = 603 \text{ nm}.$$

$$6. \left. \begin{aligned} d\sin\alpha_2 &= 2\lambda_1 \\ d\sin\alpha_3 &= 3\lambda_2 \end{aligned} \right\} \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} = \frac{2\lambda_1}{3\lambda_2} \rightarrow \sin\alpha_3 = \frac{3\lambda_2 \sin\alpha_2}{2\lambda_1} = 0,81346.$$

$$7. d = \frac{L}{N} \rightarrow N = \frac{L}{d}; \left. \begin{aligned} d\sin\alpha_k &= k_1\lambda_1 \\ d\sin\alpha_k &= k_2\lambda_2 \end{aligned} \right\} \frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2}{3} \rightarrow k_1 = 2 \text{ și } k_2 = 3;$$

$$d = \frac{k_1\lambda_1}{\sin\alpha_k} = \frac{2\lambda_1}{\frac{1}{2}} = 25 \cdot 10^{-7} \text{ m, deci } N = \frac{10^{-3}}{25 \cdot 10^{-7}} = 400.$$

- 4.1.** Determinism și predictibilitate. Condiții. Modele
- 4.2.** Determinism și impredictibilitate. Comportamentul haotic. Condiții
- 4.3.** Descrierea comportamentului haotic. Spațiul fazelor. Atractori clasici și atractori strani
- 4.4.** Elemente de geometrie fractală



Capitolul

4

Elemente de teoria haosului

„Dar deodat-un punct se mișcă... cel dintâi și singur. Iată-l
Cum din haos face mumă, iară el devine Tatăl...
Punctu-acela de mișcare, mult mai slab ca boaba spumii,
E stăpânul fără margini peste marginile lumii...
De-atunci negura eternă se desface în fâșii,
De atunci răsare lumea, lună, soare și stihii...
De atunci și până astăzi colonii de lumi pierdute
Vin din sure văi de haos pe cărări necunoscute
Și în roiuri luminoase izvorând din infinit
Sunt atrase în viață de un dor nemărginit.”

(Mihai Eminescu, Scrisoarea I)

- Ce este haosul?
- Cum a luat naștere teoria haosului?
- Sunt toate fenomenele din univers predictibile?
- Care sunt trăsăturile distinctive ale sistemelor haotice?
- Ce sunt atractorii clasici, ce sunt atractorii stranii?
- Ce sunt fractalii?

4.1.(*) Determinism și predictibilitate. Condiții. Modele

4.1.1. Conceptul de haos

Inițial, conceptul de haos desemna o totală lipsă de formă sau aranjament. În taoism (doctrină care stă la originea budismului), haos înseamnă totalitate, identitate și Natură. Fondatorul taoismului este filozoful Lao-tzî (sec. 6 î.e.n.). Potrivit doctrinei sale, lumea materială este necreată și nepieritoare fiind dirijată de „dao” – principiul ordinii în natură, societate și gândirea umană. Contradicția este acțiunea lui dao.

Cuvântul „haos” desemnează în limba greacă un spațiu infinit vid care există înaintea tuturor lucrurilor.

În concepția modernă, haos înseamnă starea de dezordine și neregularitate.

4.1.2. Teorii „adiacente” teoriei haosului

Corpurile de care se ocupă fizica pot fi reduse la puncte materiale, asupra cărora acționează forțe; fizica ignoră forma.

Forma este o noțiune calitativă (nu ca masa, viteza, temperatura). Ea nu poate crește sau scădea și nu se supune unor legi de conservare.

• Morfogeneza

Morfogeneza se ocupă cu analiza formelor pe care le iau ființele și obiectele neînsuflețite din mediul înconjurător ca, de exemplu: formele norilor, munților, țărnelor, învolburările fumului de țigară, zigzagul fulgerelor, fluturarea steagurilor în bătaia vântului și multe altele pe care le întâlnim în viața de zi cu zi.

Biologia și lingvistica sunt, de exemplu, discipline morfologice.

Organismul viu este la prima vedere un continuum. În cazul lingvisticii continuumul este limba. În acest continuum, disciplinele morfologice identifică elemente *stabile* și *repetabile*.

În biologie, celulele se adună în țesuturi, țesuturile formează organe, iar organele compun organismul viu.

În lingvistică, morfemele (morfem – cea mai mică unitate din structura morfologică a cuvântului, cu un sens determinat) se adună în silabe, silabele compun cuvintele, iar cuvintele, la rândul lor, formează fraze.

• Teoria catastrofelor

„...spectacolul Universului este o mișcare neîntreruptă a nașterii, dezvoltării și distrugerii formelor. Obiectul oricărei științe este de a prevedea

această evoluție a formelor și de a o explica pe cât posibil”, afirmă fondatorul acestei teorii, matematicianul francez René Thom (1972).

Teoria catastrofelor este cea mai generală, este pur matematică și nu face apel la principii fizice.

Matematic, cuvântul *catastrofă* semnifică apariția unei variații *discontinue* a efectelor produse de o variație *continuă* a cauzelor. *Cauza nu egalează efectul*.

Discontinuitatea unei funcții într-un punct este un *punct catastrofic*.

Pentru apariția unei forme este nevoie de o discontinuitate în proprietățile calitative ale suportului. Conturul unui nor, de exemplu, este o regiune de „catastrofă” a atmosferei, care este suportul; sau pata de culoare de pe pânza unui pictor. În fizică, ne putem gândi la transformările de fază de speța I, în care apar punctele de trecere dintr-o fază în alta – punct de fierbere, punct de solidificare, punct de topire sau punctul Curie (în cazul transformărilor de fază de speța a II-a, substanțele feromagnetice trec în substanțe neferomagnetice).

În trecut, teoria catastrofelor oferea o metodă de studiu a schimbărilor discontinue, a salturilor calitative. S-au formulat teorii catastrofiste pentru revoltele din închisori, crizele bursiere, propagarea influxului nervos ș.a.

• Teoria fractalilor

Fizica evită să studieze discontinuitățile. Ea cercetează experimental cum evoluează un fenomen, descrie matematic evoluția într-un timp infinitezimal de mic dt și apoi o integrează pe un timp mai îndelungat. Prin urmare, fizica folosește ca instrument calculul diferențial și integral, ignorând rolul geometriei în studiul fenomenelor naturale.

Geometria fractală este o nouă disciplină științifică, al cărei fondator este matematicianul francez Benoît Mandelbrot (1960).

Fractus, în latină, înseamnă frângere, zdrobire în fragmente neregulate. Fenomenul de *fractal*, introdus de Mandelbrot, înseamnă fragmentat, fracționat, neregulat, întrerupt.

Teoria fractalilor se ocupă de formele caracterizate printr-o complexitate intrinsecă, de o neregularitate fundamentală, care se manifestă la toate scările de observație.

• Teoria structurilor disipative

Teoria fizicianului belgian Ilya Prigogine (1977) nu abordează nici formele în general ca Thom, nici formele neregulate ca Mandelbrot, ci „procesele cooperative”. Acestea sunt fenomene de autoorganizare care apar în populațiile compuse dintr-un număr mare de entități identice cum sunt, de exemplu: moleculele în chimie, celulele în biologie, agenții economici în științele economice, locuitorii unui oraș în urbanism. Dacă asemenea sisteme sunt supuse unor constrângeri externe speciale cum ar fi, de exemplu, creșterea temperaturii, este posibilă apariția spontană a unei ordini în acestea.

Formarea și stabilizarea structurilor disipative se realizează prin *schimburile de materie și energie* cu mediul înconjurător.

Pentru stabilirea unei ordini, în structurile disipative au loc procese globale, în care *cooperează* un număr mare de entități.

Sistemele biologice și sociale sunt deschise (schimbă materie și energie), nu sunt stabile, ci în continuă mișcare. Dacă sistemele se dezechilibrează ele se reorganizează trecând de la dezordine la ordine.

Teoria lui Prigogine își are baza în termodinamică care este o disciplină fenomenologică.

Am învățat că al doilea principiu al termodinamicii stabilește sensul de desfășurare a proceselor termodinamice prin mărimea de stare numită entropie S . În procesele reversibile, variația de entropie este nulă, iar în procesele irreversible, variația de entropie este pozitivă, adică $\Delta S \geq 0$. Procesele naturale sunt irreversible; toate tind spre o stare de echilibru. Deci, în starea de echilibru entropia este maximă.

Entropia este o măsură a dezordinii. Creșterea entropiei este o evoluție spre starea cea mai probabilă – și cea mai dezorganizată –, caracterizată prin creșterea complexității sale. Dar să nu uităm că principiul al II-lea al termodinamicii este valabil numai pentru sisteme izolate și finite.

Trecerea de la dezordine la ordine se realizează numai pentru sistemele care satisfac două condiții:

- să fie *deschise* – să existe schimb de energie și de substanță;
- să fie menținute departe de echilibrul termodinamic.

Pentru un sistem deschis, variația de entropie într-o transformare este suma a doi termeni: $d_e S$ – fluxul de entropie care vine din exteriorul sistemului – și $d_i S$ – producția de entropie din interiorul sistemului.

$$dS = d_e S + d_i S.$$

Un organism viu își crește constant entropia apropiindu-se de entropia maximă care înseamnă moartea organismului. El se menține în viață, „hrănindu-se” constant cu entropie negativă; deci ele extrag ordinea din mediul exterior prin alimentație. Instabilitatea creează ordine; aceasta poate fi obținută prin modificarea constrângerilor globale care acționează asupra sistemului.

4.1.3. Teoria haosului

Rădăcinile teoriei haosului se găsesc în studiile lui Henri Poincaré (1900) asupra *problemei celor trei corpuri* – mișcarea și interacțiunea a trei corpuri între care se exercită forțe de interacțiune gravitațională. Newton a rezolvat problema a două corpuri care interacționează în câmp gravitațional, dar apariția unui al treilea corp ridică dificultăți matematice.

Inițiatorul „teoriei haosului” a fost meteorologul Edward N. Lorenz (1960). El a constatat că un set simplu de trei ecuații diferențiale neliniare de ordinul întâi poate duce la o traiectorie complet haotică.

De asemenea, el a realizat că schimbări extrem de mici în condițiile inițiale pot avea urmări neașteptate. Numele lui Lorenz este legat de „efectul

fluture”: poate bătaia din aripi a unui fluture în Brazilia să provoace o tornadă în Texas?

Fizicianul teoretician David Ruelle (1970) a stimulat teoria haosului prin studiul său asupra turbulenței fluidelor.

Din punct de vedere matematic, teoria haosului folosește metoda iterativă (repetativă) aplicată formulelor matematice simple.

„Catalizatorul” dezvoltării teoriei haosului a fost calculatorul electronic.

A fost necesară apariția calculatoarelor performante pentru a putea urmări evoluții în timp îndelungat, necesare pentru observarea și măsurarea comportamentului haotic. În dezvoltarea acestei teorii au coroborat toate teoriile „adiacente”, geometria fractalilor și tehnologia calculatoarelor.

Unii pretind că teoria haosului este a treia revoluție în fizică, după teoria relativității și teoria cuantică. Ea invită la cunoașterea bogăției și complexității formelor și a metamorfozelor lor.

Teoria haosului este o „mare” în care se varsă „râurile și afluenții” tuturor disciplinelor: matematica, fizica, astronomia, meteorologia, biologia, chimia, medicina, economia, ingineria, studiul burselor de valori și a civilizațiilor.

Teoria haosului descrie sisteme aparent dezordonate, dar caută ordinea sub această aparență. Se pare că haosul conține mai multă ordine decât ne așteptăm. Haosul precede ordinea sau ordinea provine din dezordine.

4

4.1.4. Determinism și predictibilitate

Conform dicționarului de filozofie, prin *determinism* se înțelege geneza și desfășurarea fenomenelor și proceselor care au loc în natură și societate, în viața materială și psihică a oamenilor, ordonate cauzal și supuse legilor obiective.

În fizică, în particular, prin determinism înțelegem că starea viitoare a sistemului studiat este determinată în mod *unic* de starea actuală și descrisă de legi. Mișcarea este generată de un set concis de ecuații.

Thom afirma: „pentru ca un model să permită predicția este necesar să fie cantitativ”.

Sistemele deterministe, predictibile, nehaotice le întâlnim frecvent. Oamenii de știință le-au studiat și au descoperit cu sute de ani în urmă cum se manifestă.

În general, fenomenele sunt predictibile dacă sunt guvernate de legi.

Cuvântul *dinamică* sugerează forță, energie, mișcare și schimbare.

În mecanica clasică se studiază evoluția în timp a sistemelor conservative (caracterizate de absența frecării) și disipative (în care există frecare). În aceste sisteme putem determina relația dintre cauză și efect și putem face predicții.

În cazul legii fundamentale a dinamicii, legea lui Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

dacă se cunosc coordonatele inițiale și vitezele particulelor, evoluția sistemului este predictibilă pe un timp destul de îndelungat.

Pendula este un sistem determinist simplu, stabil și bine cunoscut. Sistemele cu un comportament determinist se pretează la o reprezentare liniară – o linie dreaptă pe un grafic. De exemplu, se știe din experiență că densitatea scade linear cu creșterea temperaturii. Pe baza acestui fapt putem, extrapolând dreapta, să determinăm densitatea la temperaturi dificil de obținut.

Știind că rezistența electrică variază liniar cu temperatura într-un anumit interval de temperatură (~ 20–700 °C), se determină câteva puncte prin care trece dreapta (30, 50, 70, 100 °C). Analog, se obține prin extrapolare valoarea rezistenței, pentru temperaturi mai greu de obținut în laborator.

Prin *liniaritate* mai înțelegem faptul că efectele sunt proporționale cu cauzele.

Când se aruncă un corp pe verticală în sus cu viteza v_0 , înălțimea maximă atinsă de acesta este $\frac{v_0^2}{2g}$. Dacă se dublează viteza inițială, înălțimea maximă este $\frac{4v_0^2}{2g}$. Schimbarea respectă schimbarea din condițiile inițiale.

În cazul unui resort elastic, forța elastică ce ia naștere în resort, în urma deformării acestuia, și îl readuce în poziția de echilibru, este direct proporțională cu deformarea:

$$F_e = -kx.$$

Cu cât deformarea este mai mare cu atât forța elastică este mai mare.

Sistemele liniare pot fi descrise matematic printr-o ecuație simplă în care variabilele x și $\dot{x}$ apar numai la puterea întâi.

Ecuația 1.12 este o ecuație diferențială liniară.

Sistemele liniare se întâlnesc rar în natură; toate sistemele reale sunt neliniare.

Sistemele neliniare sunt descrise de ecuații neliniare în care variabilele apar la puteri mai mari ca 1.

Predictibilitatea operează numai în limitele trasate de legi, dar lumea este complexă.

4.2.(*) Determinism și impredictibilitate. Comportamentul haotic. Condiții

Din start, Universul este determinist, supunându-se legilor fizicii, dar capabil de dezordine, complexitate și impredictibil.

Apariția calculatoarelor perfecționate a pus în evidență faptul că predictibilitatea nu este valabilă pentru un timp infinit de mare.

Există limite în înțelegerea și prezicerea comportamentului viitor a diferitelor sisteme precum: organismele vii, populația unei țări, bursele de valori, civilizații ș.a.

Mișcarea, chiar și a unor sisteme dinamice foarte simple, nu este întotdeauna predictibilă pentru un viitor îndepărtat. Asemenea mișcări au fost numite haotice și studiul lor a promovat noi idei în matematică.

Termenul *haotic* este asociat cu problemele *deterministe* și *impredictibile*.

Din punct de vedere matematic, probabilitatea predicției tinde către zero pe măsură ce trece timpul.

Procese haotice abundă în natură și societate. Astfel: traiectoria urmată de o frunză în căderea ei, curgerea învolburată a unei ape, atunci când întâmpină diferite obstacole, dărele lăsate de o șalupă, mișcările din atmosfera terestră, fibrilațiile ventriculare, seismele și multe altele sunt procese haotice întâlnite în natură, iar comportamentul mulțimilor (sociologie), revoluțiile (științe politice), formarea prețurilor (științe economice) ș.a. aparțin sferei sociale.

Haosul apare în oscilații mecanice, în circuite electrice, în reacții chimice. Prototipul fenomenului haotic în fizică este turbulența.

Dacă în timpul curgerii liniile de curent nu mai sunt paralele între ele și în interiorul fluidului (lichid sau aer) se formează vârtejuri, curgerea se numește turbulentă.

Formarea vârtejurilor determină creșterea rezistenței pe care fluidul o opune corpului în deplasare.

Forța de rezistență F_R , întâmpinată de un corp care se mișcă într-un fluid aflat în regim de curgere turbulentă, este direct proporțională cu pătratul vitezei:

$$F_R = CS \frac{1}{2} \rho v^2,$$

unde:

C – constantă adimensională care depinde de forma corpului;

S – aria secțiunii transversale a corpului;

ρ – densitatea fluidului;

v – viteza de deplasare a corpului.

Raportul adimensional:

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$$

se numește *numărul lui Reynolds*.

Mărimile ρ , v au semnificațiile menționate mai sus, iar l este raza corpului sferic care se deplasează prin fluid și η este coeficientul de vâscozitate al fluidului.

În cazul unui corp nesferic, în expresia numărului lui Reynolds apare dimensiunea liniară l a corpului, iar pentru curgerea fluidului printr-o conductă – diametrul D al conductei.

Experimental, s-a constatat că pentru $Re < 2400$ curgerea este laminară și pentru $Re \geq 2400$ curgerea devine turbulentă.

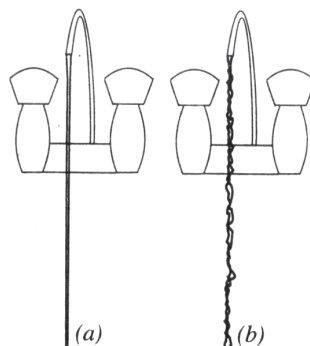


Fig. 4.1 a – Curgere laminară.
b – Curgere turbulentă.

Valoarea vitezei de curgere turbulentă printr-o conductă, pentru care numărul lui Reynolds are valoarea 2400, se numește viteză critică v_c :

$$v_c = \frac{2400\eta}{D\rho}.$$

Forța gravitațională este o forță neliniară: $F = k \frac{Mm}{R^2}$ fiind direct proporțională cu $\frac{1}{R^2}$. În cazul interacțiunii gravitaționale a trei corpuri, orbitele acestora sunt imprevizibile.

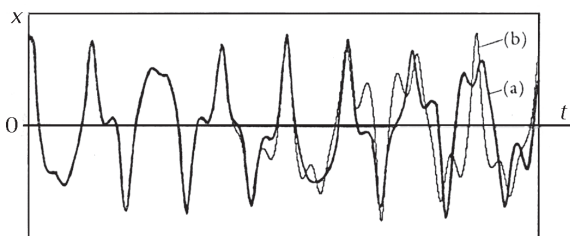


Fig. 4.2

Soluții numerice ale ecuației 4.1. a) la $t = 0$; $x = 3$ și $\dot{x} = 3$; b) la $t = 0$; $x = 3,003$, $\dot{x} = 3$.

În dispozitive electronice neliniare precum diodele semiconductoare, tranzistoarele, tuburile cu descărcări în gaze, tuburile electronice (cu vid), termistoarele, caracteristica $I = f(U)$ nu mai este liniară și legea lui Ohm nu mai este aplicabilă.

Teoria haosului creează modele pentru fenomenele naturale care prezintă neliniaritate. Ceea ce caracterizează aceste modele este faptul că ele sunt descrise de *ecuații aparent simple, dar cu soluții ce pot fi complexe și imprevizibile*.

O astfel de ecuație „simplă”, care dă naștere oscilațiilor haotice, este de forma:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + x^3 = F_0 \cos \Omega t \quad (4.1)$$

fiind o ecuație neliniară pentru oscilații forțate în care forța elastică este proporțională cu x^3 și nu cu x .

Prin reprezentarea soluțiilor obținute prin calcul numeric (pe calculator) pentru valori fixate ale lui δ , Ω și F_0 au rezultat oscilațiile aperiodice din figura 4.2.

Analizând mai multe variante de evoluție se observă că o foarte mică modificare în condițiile inițiale (fig. 4.2 curba *b*) schimbă esențial comportarea sistemului peste un interval de timp.

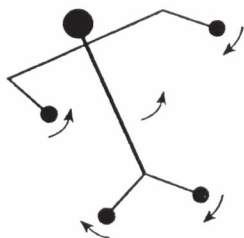


Fig. 4.3

Jucăria „haotică”.

Experimental, se pot pune în evidență mișcări haotice cu pendulul dublu, pendulul triplu sau o „jucărie haotică” ca în figura 4.3.

Faptul că mici diferențe în condițiile inițiale dau naștere la importante modificări în fenomenul final a fost pus în evidență de meteorologul Lorenz, întemeietorul teoriei haosului.

Pentru descrierea mișcărilor din atmosfera terestră, el a format un sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul întâi. Ecuațiile neliniare redau relația

interactivă dintre trei factori meteorologici: temperatură, presiune și viteza vântului.

Pentru găsirea soluțiilor, el a folosit un procedeu de rezolvare aproximativă, prin iterații succesive. Lorenz a calculat starea sistemului la momentul $t, (t + 1) \dots (t + i)$ și a observat că pentru anumite valori ale unor parametri soluțiile obținute erau aleatorii, „haotice”. O dată, pentru a scurta programul derulat, el a schimbat una dintre datele inițiale din 0,506127 în 0,506 și a obținut un rezultat total diferit față de soluția anterioară.

Lorenz a botezat aceste divergențe „efect fluture” (pornind de la întrebarea: *poate produce bătaia de aripi a unui fluture din Brazilia o tornadă în Texas?*). Adică, o schimbare minimă în condițiile inițiale poate avea efecte catastrofale. Parametrii pot fi ușor modificați, dar nu se poate prevedea cu precizie reacția sistemului.

În dinamica clasică, fenomene precum echilibrul, mișcarea periodică, mișcarea cvasiperiodică sunt predictibile, ele nu sunt sensibile la schimbările condițiilor inițiale. În schimb, sistemele aperiodice instabile nu se repetă niciodată. Ele sunt sensibile la mici perturbări și sunt impredictibile. Și în istoria civilizațiilor, evenimente lipsite de importanță au dus la schimbări de durată.

• **Caracteristicile unei mișcări haotice**

1. **Nelinaritatea** este o caracteristică esențială a mișcării haotice dar asta nu înseamnă că neliniaritatea implică neapărat mișcare haotică.

2. **Dependența sensibilă la condițiile inițiale**, care face imposibilă predicția pe termen lung. Asta mai înseamnă și pierderea informației asupra condițiilor inițiale.

3. **Aperiodicitate** – mișcarea nu se repetă niciodată identic.

4. O oarecare stabilitate, cu oarecare tensiuni și fără salturi. Haosul poate fi și el stabil.

Pe baza acestor caracteristici se cunosc și diferite definiții ale haosului:

„Comportament recurent aparent aleatoriu într-un sistem determinist simplu.”

„Comportament instabil aperiodic în sisteme neliniare deterministe.”

„Capacitatea modelelor simple de a genera un comportament extrem de neregulat.” (Ian Stewart – matematician)

4.3.(*) Descrierea comportamentului haotic. Spațiul fazelor. Atractori clasici și atractori stranii

Dinamica fenomenelor haotice este mai ușor de înțeles și de relevat din perspectiva spațiului fazelor.

4.3.1. Descrierea comportamentului unui sistem fizic în spațiul fazelor

În mecanica clasică se lucrează cu noțiunea de punct material.

Poziția punctului material este determinată în spațiul tridimensional de vectorul de poziție $\vec{r}$, care este funcție de coordonatele cartezienne x, y, z .

Pozițiile în spațiu a N puncte materiale sunt date de N vectori de poziție, deci sunt caracterizate de un număr de $3N$ coordonate.

Parametrii independenți care determină, în mod univoc, starea sistemului se numesc grade de libertate.

Numărul gradelor de libertate pentru pozițiile celor N puncte materiale, este deci, $3N$.

Acești parametri nu trebuie să fie neapărat coordonate carteziane ci pot fi mărimi de altă natură ca de exemplu unghiul α , impulsul $p = mv$ ș.a.

Parametrii independenți $x_1, x_2, \dots, x_N$ care caracterizează starea sistemului se numesc *coordoanate generalizate* x_i iar $\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$ (adică v_i) se numesc *viteze generalizate* $\dot{x}_i$.

Relațiile:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_N); \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_N); \dots; \dot{x}_N = f_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

definesc un *spațiu al fazelor* N dimensional.

Dacă la un moment dat se cunosc toate coordonatele, x_i , și toate vitezele,

$\dot{x}_i$, se cunosc și toate accelerațiile, $\frac{d^2x_i}{dt^2} = \ddot{x}_i$, adică a_i .

Relațiile care leagă accelerațiile de coordonate și de viteze se numesc **ecuațiile mișcării**. Variațiile acestor coordonate în timp permit cunoașterea traiectoriei sistemului.

Starea sistemului la un moment dat se reprezintă în spațiul fazelor printr-un **punct**, iar **schimbarea stării**, printr-o **traiectorie**.

Spațiul fazelor nu are nimic comun cu spațiul real. Spațiul fazelor este o structură pur geometrică, în sensul că legile de variație ale stării sistemului pot fi formulate într-un **limbaj geometric**.

Să studiem mișcarea oscilatorului liniar armonic în spațiul fazelor. Mișcarea este descrisă de ecuația 1.12:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Știm că elongația unei oscilații armonice este dată de relația:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \text{ și } \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Eliminăm timpul din cele două relații:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\omega t + \varphi) &= \frac{x}{A} \\ \cos(\omega t + \varphi) &= \frac{\dot{x}}{A\omega} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left(\frac{x}{A} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{A\omega} \right)^2 = 1.$$

Rezultă că, în spațiul fazelor bidimensional, mișcarea oscilatorie armonică este reprezentată printr-o elipsă cu semiaxa mare egală cu A și semiaxa mică egală $A\omega$ (fig. 4.4).

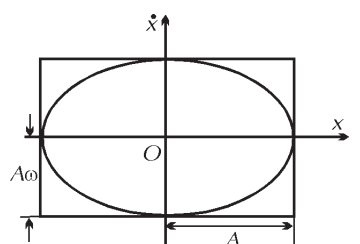


Fig. 4.4

Reprezentarea mișcării oscilatorii armonice în spațiul fazelor bidimensional este o elipsă.

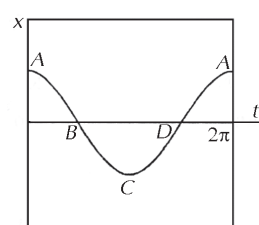


Fig. 4.5

Mișcarea oscilatorie armonică pentru $\omega = 1 \text{ rad/s}$ este în spațiul fazelor bidimensional un cerc.

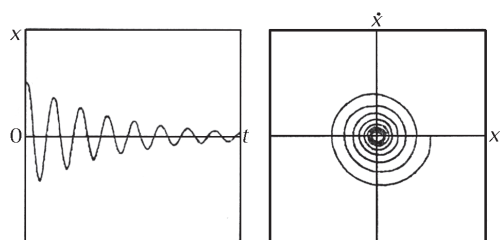
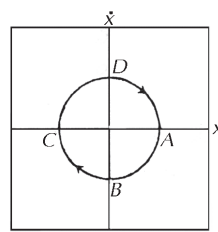


Fig. 4.6

Reprezentarea oscilațiilor amortizate în spațiul fazelor bidimensional.

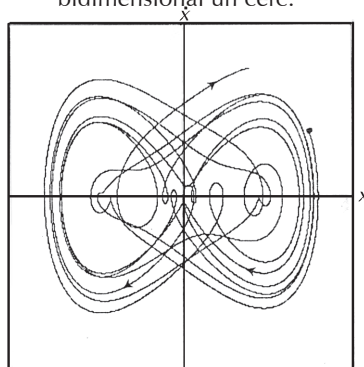


Fig. 4.7

Reprezentarea în spațiul fazelor bidimensional a oscilațiilor din fig. 4.2, (a).

În general, o mișcare periodică în spațiul fazelor bidimensional este o curbă închisă.

În figura 4.5 este reprezentată o mișcare oscilatorie armonică având $\omega = 1 \text{ rad/s}$. În spațiul fazelor ea reprezintă un cerc.

Figura 4.6 arată reprezentarea oscilațiilor amortizate în spațiul fazelor bidimensional.

Mișcările haotice au orbite care nu se închid și nu se repetă (fig. 4.7).

4.3.2. Atractori clasici și atractori stranii

Un **atractor** este un punct, o curbă, o suprafață către care converg traiectoriile izvorâte din toate punctele aparținând vecinătății sale.

Exemple: lacurile care adună apele de pe pantele aflate în vecinătatea lor, rigolele. Starea atractivă pentru un pendul gravitațional care efectuează oscilații amortizate este poziția sa de echilibru.

După cum știm, punctele de echilibru corespund potențialului minim. Dacă nu se acționează asupra sistemului, el rămâne în această stare.

Este posibil ca potențialul să aibă mai multe minime și starea sistemului este nedeterminată. Acest caz intră sub incidența convenției lui Maxwell:

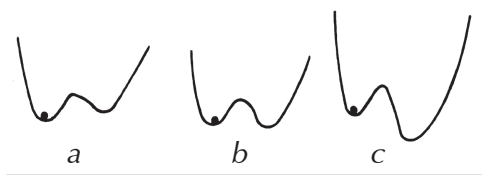


Fig. 4.8 a – convenția lui Maxwell;
b – „catastrofă de conflict”;
c – „catastrofă de bifurcație”.

sistemul se plasează în starea minimului *absolut* al potențialului (fig. 4.8, a). Dacă există două minime absolute egale, între cei doi atractori se naște o „luptă” („catastrofă de conflict”) (fig. 4.8, b).

În figura 4.8, c este reprezentat un atractor instabil („catastrofă de bifurcație”).

Un atractor instabil se bifurcă în doi sau mai mulți atractori în conflict. La rândul lor, și acești atractori se pot bifurca dacă devin instabili (fig. 4.9).

Tranzițiile de fază sunt discontinue. Referindu-ne la trecerea din faza lichidă în cea gazoasă (evaporarea), putem spune că faza lichidă și cea gazoasă sunt doi atractori care-și împart un domeniu al diagramei fazelor.

René Thom atribuie fiecărei morfogeneze o „luptă” între doi sau mai mulți atractori.

Situațiile dinamice care guvernează fenomenele naturale sunt fundamentale aceleași cu cele care hotărăsc evoluția omului și a societății. Ambele rezultă din sciziunea unor atractori în două sau mai multe componente, care intră în conflict în cuprinsul aceluiași spațiu. Echivalentul atractorilor clasici în diferite domenii sunt șefii, statele, religia, clasa socială, anumite afinități etc.

Teoria haosului afirmă că există *câteva* poziții de echilibru pe piață. Existența *unui punct* de echilibru determină beneficii reduse.

Cele trei tipuri de mișcare dinamică: echilibru, mișcare periodică, mișcare cvasiperiodică sunt *atractori clasici*. În prezența unei forme de amortizare, sistemul este „atras” spre una dintre aceste stări.

Atracorii clasici sunt asociați cu obiecte geometrice clasice în spațiul fazelor. Starea de echilibru este un punct, mișcarea periodică este o curbă închisă, iar mișcarea cvasiperiodică este o suprafață în spațiul fazelor tridimensional.

În spațiul fazelor tridimensional, *atractorul straniu* reprezintă o serie de suprafețe paralele, separate de distanțe din ce în ce mai mici. Mișcările haotice tind spre atracorii stranii. Atracorii stranii există în spațiul fazelor, care este o „hartă flexibilă” a tuturor informațiilor posibile.

Să luăm ca exemplu roata cu apă. La viteze mici ale fluxului de apă sistemul lucrează normal. La viteze crescute ale fluxului de apă, timpul de umplere și golire a cupelor este mai mic și sistemul începe să se comporte imprevizibil: roata își poate încetini mișcarea sau chiar să-și schimbe sensul de rotație (fig. 4.10).

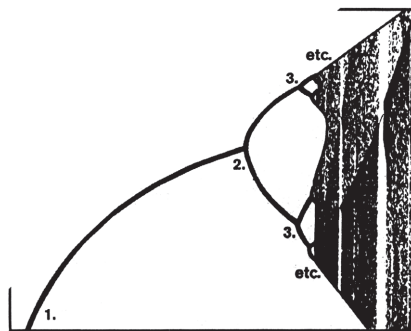


Fig. 4.9 Bifurcațiile atractorilor.

Dacă se reprezintă grafic mișcarea roții se obține o spirală dublă în spațiul fazelor, numită atractor straniu. Atractorii reprezintă stările în care se fixează sistemul în final.

Proprietatea fundamentală a atractorilor stranii este **supersensibilitatea la condițiile inițiale** (SSCI). Este o noțiune cheie a teoriei haosului. Evoluția unui sistem, determinist sau nu, este dependentă de starea inițială. Dacă traiectoriile care la început erau foarte apropiate se îndepărtează **exponențial** odată cu trecerea timpului, sistemul depinde exponențial de condițiile inițiale. Atractorii stranii utilizați în modelarea sistemelor haotice sunt dependenți de condițiile inițiale. Atracția implică convergența traiectoriilor, iar SSCI divergența lor.

Lorenz afirma că: „...două stări imperceptibil diferite pot evalua în două stări considerabil diferite dacă există vreo eroare în observarea stării prezente... va fi imposibilă o prezicere acceptabilă a stării instantanee din viitorul îndepărtat”.

Cantitativ, teoria haosului a fost dezvoltată de Alexander Lyapunov. Exponentul Lyapunov descrie dinamica evoluției traiectoriei, dându-ne informații despre convergența sau divergența sistemului.

În sistemele deterministe care implică sensibilitate la condițiile inițiale, în cazul în care în spațiul fazelor traiectoriile sunt apropiate la început, pentru valori mai mari ale timpului, ele se îndepărtează exponențial unele de altele. Distanța dintre două puncte de pe traiectorie variază în timp după legea:

$$d(t) = d_0 2^{\lambda t},$$

unde d_0 este distanța dintre cele două puncte la momentul inițial, iar λ este exponentul Lyapunov. El măsoară viteza cu care diverg traiectoriile apropiate în spațiul fazelor. Pentru un sistem dinamic anume este o măsură a haosului. Semnul lui λ este un criteriu pentru a stabili dacă mișcarea este haotică sau nu.

Pentru mișcări nehaotice $\lambda \leq 0$ iar pentru cele haotice $\lambda > 0$.

• **Caracteristicile atractorilor stranii:**

- au un aspect straniu;
- supersensibilitate la condițiile inițiale (SSCI);
- traiectorii apropiate se întâlnesc pe ei și se despart rapid;
- deși există într-un spațiu infinit dimensional (spațiul fazelor) ei au dimensiuni finite.

Atractorul trebuie să fie stabil și să reprezinte starea finală a sistemului dinamic, să nu se repete și să nu se autointersecteze.

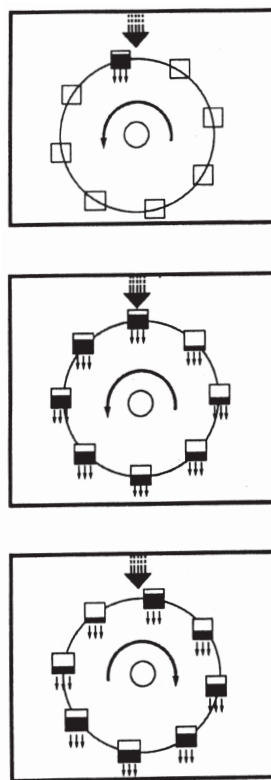


Fig. 4.10 Roata cu apă.

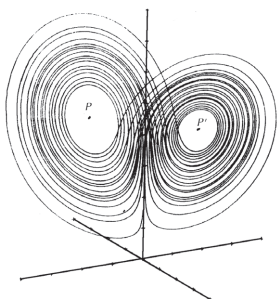


Fig. 4.11 Atractorul Lorenz¹.

• Atractorul „Potcoavă”

El a fost imaginat de matematicianul Stephen Smale și obținut prin repetarea la infinit a supra-punerii unui plan pe el însuși.

Un pătrat este întins pe orizontală și contractat pe verticală (fig. 4.12). Apoi se îndoaie dreptunghiul obținut în formă de potcoavă, astfel încât să poată fi înscris în pătrat. Operația se repetă. Toate iterațiile născute din pătratul inițial converg către acesta deci el este un atractor. Imaginea oricărui punct al pătratului se găsește în cadrul mulțimii obținute în secțiunea verticală.

Atractorii stranii constau dintr-un număr infinit de curbe, suprafețe sau mulțimi supradimensionale. Ei sunt, de fapt, obiecte fractale, caracterizate prin dimensiuni neîntregi sau fracționare.

Atractorii stranii au structură fractală.

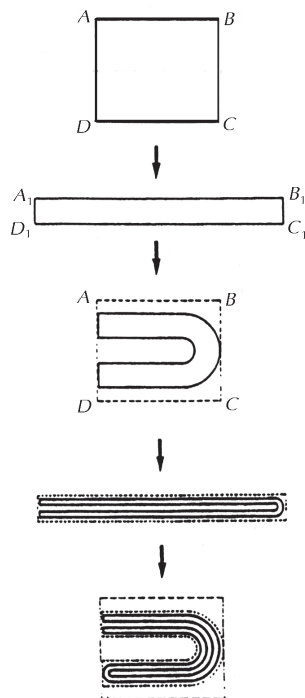


Fig. 4.12 Realizarea atractorului „potcoavă”.

4.4.(*) Elemente de geometrie fractală

Geometria fractală este o metodă descriptivă naturală a structurilor complexe. Geometria fractală este prezentă în toate domeniile științelor naturii, de la ansambluri moleculare, la aspecte geologice și până la galaxii.

Știința modernă caută să descrie comportări complexe prin sisteme simple. Este surprinzătoare, în cazul haosului și fractalilor, coexistența unei formulări simple și a comportamentului complex. Fractalii pot descrie o diversitate de fenomene naturale precum: forme de relief (coastele mărilor, ale oceanelor, munții), organisme vii (animale, vegetație), forma fulgilor de zăpadă, a norilor și multe altele.

¹ Găsiți, la http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/Lesson1/Demo8.html, o aplicație de dezvoltare dinamică a traiectoriilor atractorului Lorenz.

B. Mandelbrot, întemeietorul geometriei fractale, afirma: „Instrumentul fractal aduce unitatea în diversitatea subiectelor.”.

• Ce caracterizează o structură fractală?

– La diferite scări, părțile au aceeași structură ca și întregul. Cele mai ilustrative sunt conopida și broccoli.

– La orice scară, structura este neregulată, fragmentată și *nu* poate fi descrisă cu ajutorul geometriei euclidiene.

– Este caracterizată de o dimensiune fractală D care este mai mare ca dimensiunea topologică d .

– Poate fi definită foarte simplu, eventual recursiv.

Un obiect fractal este autosimilar: examinat de aproape sau de departe, la scară mare sau mai mică, arată la fel.

Proprietatea de *autosimilitudine* sau omotetie: orice subsistem al unui sistem fractal este echivalent cu întregul sistem. Există un tipar repetitiv.

Copacii, munții sunt fractali. Plămânii și aparatul digestiv (fig. 4.13), vasele de sânge, unele celule nervoase sunt fractali.

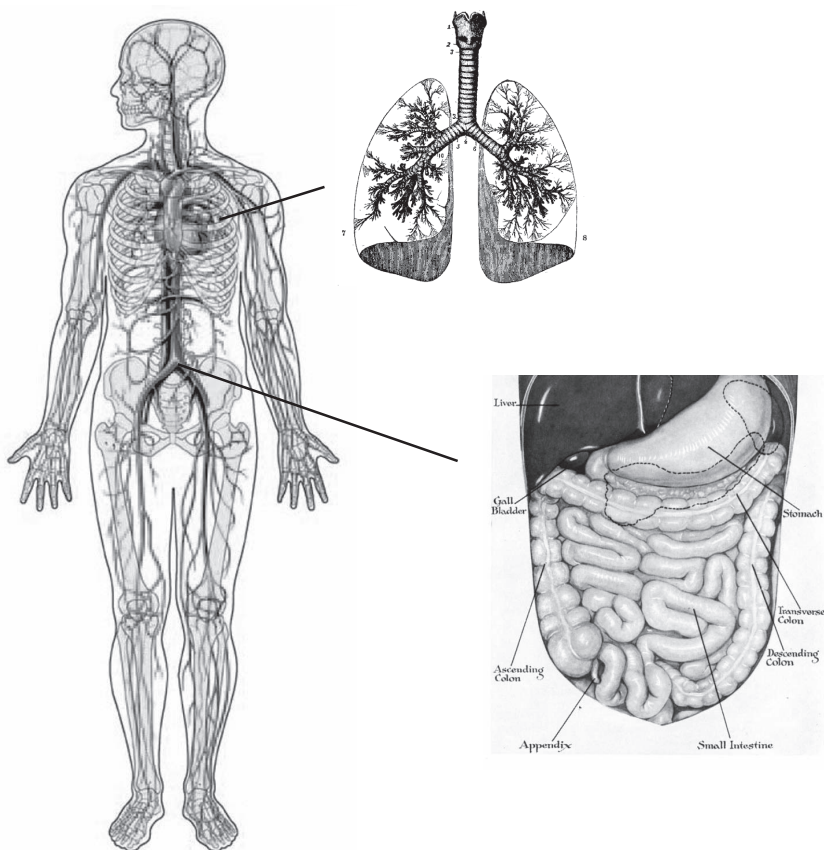


Fig. 4.13

În sensul strict al termenului, formele naturale nu sunt fractali întrucât nu sunt întotdeauna autosimilare. Fractalii se regăsesc în polimeri și geluri. Toți polimerii (nailon, polistiren, plexiglas) au o caracteristică: sunt macromolecule uriașe, formate din milioane de atomi. De obicei, aceste macromolecule repetă o unitate numită *monomer*. Dacă sunt formate din două tipuri diferite de monomeri, într-o succesiune regulată sau întâmplătoare, se numesc copolimeri. Macromoleculele pot fi liniare sau ramificate, neutre sau încărcate electric, amorse sau cristaline.

4.4.1. Geometria euclidiană și geometria fractală

Geometria euclidiană nu poate descrie întreaga complexitate și diversitate a formelor naturale. Norii nu sunt sfere, munții nu sunt conuri, fulgerul nu se propagă în linie dreaptă, plămânul are o construcție arborescentă ș.a.m.d.

Știm că lungimile se măsoară în m, ariile în m^2 și volumele în m^3 . Corespunzător, dimensiunile euclidiene sunt 1, 2, 3 și 0 pentru punct.

Un segment de dreaptă poate fi „pavat” cu $k = N$ părți de segmente. Un dreptunghi poate fi acoperit cu $k = N^2$ dreptunghiuri. Un paralelipiped dreptunghic poate fi umplut cu $k = N^3$ paralelipipe dreptunghice.

Se definește ca *raport de similitudine* s :

$$s(N) = \frac{1}{k} = \frac{1}{N^d} \quad (4.2)$$

unde d , în cazul geometriei euclidiene, ia valori 0 pentru punct, 1 pentru segment de dreaptă, 2 pentru plan și 3 pentru volum.

Rezultă că N , s și d verifică relația:

$$N = (s)^d \quad (4.3)$$

și

$$d = \frac{\ln N}{\ln s} \quad (4.4)$$

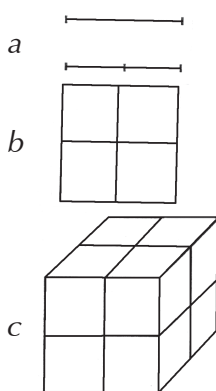


Fig. 4.14 Exemple de calcul a dimensiunii topologice.

Această dimensiune, (d), este numită de matematicieni *dimensiune topologică*.

Să luăm câteva exemple.

- Împărțim un segment de dreaptă în două segmente egale (fig. 4.14, a). În acest caz:

Numărul bucăților este $N = 2$.

Dimensiunea este $d = 1$.

Raportul de similitudine $s = 2$ (așa cum rezultă din relația 4.3)

- Împărțim un pătrat în 4 pătrate egale (fig. 4.14, b).

$N = 4$, $d = 2$, $s = 2$ ($s = N^{1/2} = \sqrt{4} = 2$).

- Împărțim un cub în 8 cuburi egale.

$N = 8$, $d = 3$, $s = 2$ ($s = N^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$).

Înlocuind datele, pentru cele trei cazuri, în relația 4.4:

$$d_1 = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1; \quad d_2 = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2; \quad d_3 = \frac{3 \ln 2}{\ln 2} = 3,$$

observăm că se obțin numere întregi.

Începând cu anii '60, matematicianul francez Benoît Mandelbrot a dezvoltat teoria obiectelor autosimilare, arătând că ele au o *dimensiune fracționară* numită *dimensiune fractală*, D .

Dimensiunea fractală este un număr care cuantifică gradul de neregularitate și de fragmentare a unui obiect din natură. Particularitatea acestor numere este că *nu sunt numere întregi*. Ele sunt fracții simple ($1/2$, $3/4$) sau numere iraționale ca $\ln 4 / \ln 3 = 1,2618\dots$ sau π .

Dimensiunea fractală, D , a unor curbe plane neregulate este cuprinsă între 1 și 2, a unor suprafețe pline de convoluțiuni (frunză), între 2 și 3 și a unei dâre de praf, între 0 și 1.

Cu ajutorul dimensiunii fractale se poate măsura proprietatea fractală a autosimilitudinii și se poate caracteriza „stranietatea” atractorului haotic.

Majoritatea biostructurilor pot fi studiate pe baza geometriei fractale. O tumoră malignă poate fi considerată un obiect fractal cu dimensiunea fractală cuprinsă între 0 și 1.

4.4.2. Mulțimi de fractali

Există două categorii de fractali:

- nedeterminiști nestratificați, care sunt aleatorii – cum este mișcarea browniană;
- determiniști stratificați, care se obțin printr-un *procedeu recursiv*: mulțimea lui Cantor, curba lui von Koch, sita lui Sierpinski ș.a.

1. Mulțimea lui Cantor

Este cea mai simplă structură fractală, cunoscută încă din anul 1883, construită de matematicianul german Georg Cantor.

Se pleacă de la un segment de dreaptă care se taie în trei segmente egale izolându-se segmentul central.

Se repetă operațiunea cu cele două segmente rămase ș.a.m.d. (fig. 4.15). Această operație se continuă la infinit, obținându-se în final o infinitate de puncte aliniate, numită „praful lui Cantor”. Ansamblul Cantor are o structură fractală:

- este autosimilar – prin aceeași operație se trece de la un anumit nivel la un nivel imediat inferior;

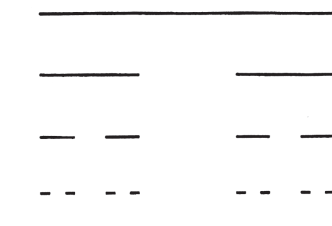


Fig. 4.15 Construcția mulțimii lui Cantor.

– are dimensiunea fractală $\frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309\dots$

„Praful lui Cantor” are dimensiunea topologică $d = 0$, deci $D > d$.

Se poate observa că secțiunea verticală a atractorului „potcoavă” (fig. 4.12) este o mulțime Cantor.

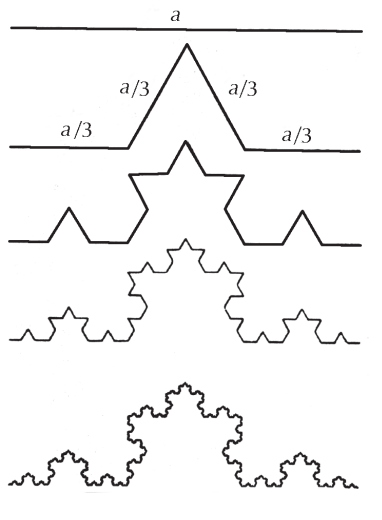


Fig. 4.16

Construcția
curbei von Koch.

2. Curba lui von Koch

A fost imaginată în 1904, de către matematicianul Helge von Koch. Este o curbă continuă care nu admite tangentă.

Se împarte un segment de dreaptă de lungime a în trei segmente de dreaptă egale. În loc să se elimine partea centrală, se înlocuiește cu două bucăți de lungime $a/3$. Se obține o linie frântă, de lungime $4a/3$ (fig. 4.16). Această linie frântă este generatorul mulțimii. Se continuă procedeul la infinit.

Curba lui von Koch este autosimilară, are lungimea infinită și dimensiunea fractală $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2618\dots$. Dimensiunea topologică este 1, întrucât este o linie continuă. Deci $D > d$. Este frapantă asemănarea dintre această curbă și coasta Bretniei.

3. Sita lui Sierpinski

Inițiatorul construcției numită *Sita lui Sierpinski* este un triunghi echilateral (fig. 4.17).

Se împarte triunghiul în patru triunghiuri egale și se elimină triunghiul din centru. Se repetă operația asupra celor trei triunghiuri rămase ș.a.m.d. Dimensiunea fractală este $\frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,5849\dots$

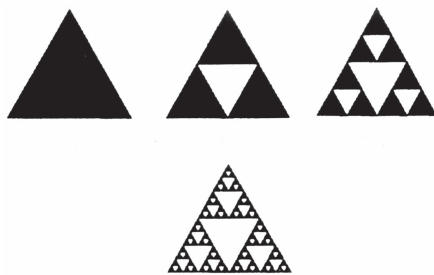


Fig. 4.17

Construcția sitei lui
Sierpinski.

Pe calculator se pot construi imaginile unor munți fictivi, care sunt remarcabile prin realismul lor. Se pornește de la un plan pe care se trasează o dreaptă oarecare. Se separă cele două bucăți, deplasându-le în lungul dreptei, pe direcție verticală. Procedeul se repetă. Această metodă iterativă permite obținerea unor suprafețe neregulate ce simulează un relief natural.

Dimensiunea fractală caracterizează consistența reliefului – cu cât este mai mare cu atât sunt mai neregulate formele muntelui.

Această metodă de simulare este folosită în cinematografie și televiziune, pentru crearea de efecte speciale. Este una dintre cele mai importante aplicații ale geometriei fractale. Ea face parte din tehnica imaginilor de sinteză în trei dimensiuni.

Astfel, imaginile extraterestre din trilogia „Războiul stelelor” au fost generate pe calculator, folosind fractalii.

Artiștii sunt cucerți de frumusețea unor structuri fractale, îmbogățindu-le cu frumoase culori (fig. 4.18). Un exemplu de aplicare a geometriei fractale la modelarea completă a unui fenomen fizic îl constituie arborescențele din figurile de creștere a cristalelor sau a depunerilor electrolitice, din imaginile scânteilor electrice. Toate sunt structuri fractale naturale.

Știm că procesul de cristalizare pornește de la un germene central. Pe calculator se simulează mișcarea dezordonată a atomilor. Atomii atrași de germene se fixează pe el. Prin atragerea altor atomi se favorizează formarea ramificațiilor. Pentru structurile arborescente, produse prin acest mecanism, s-a calculat teoretic o dimensiune fractală $D = 1,71$ – care se apropie foarte mult de măsurătorile experimentale.

Astronomul german Olbers (1823) s-a întrebat de ce cerul este negru în nopțile fără Lună. În acea epocă, nu se cunoșteau galaxiile. Universul era imaginat ca un spațiu infinit în care stelele erau repartizate aleatoriu dar cu o densitate medie uniformă. Conform unui asemenea model, intensitatea luminoasă recepționată de un observator ar trebui să fie foarte mare și cerul ar trebui să fie alb în timpul nopții (paradoxul Olbers).

În anul 1907, Fournier D’Albe a propus un model de Univers pentru care a ales o dimensiune fractală astfel încât cerul să fie negru și densitatea stelelor să nu fie uniformă.

Teoreticienii au demonstrat ulterior că galaxiile nu sunt repartizate uniform în spațiu, fiind grupate în roiuri, și că este suficient să aibă o structură fractală, de dimensiune fractală mai mică decât 2, pentru ca cerul să apară negru în timpul nopții.

Geometria fractală ajută la înțelegerea unor fenomene complexe precum: galaxiile, formele de relief, rocile, suprafețele și interfețele neregulate, polimerii, sistemul pulmonar și circulator; de asemenea, constituie un „instrument” în analiza unor fenomene diverse: ritmurile muzicale, ritmurile inimii, cele economice și de evoluție biologică.

Geometria fractală a contribuit mult la dezvoltarea teoriei haosului.

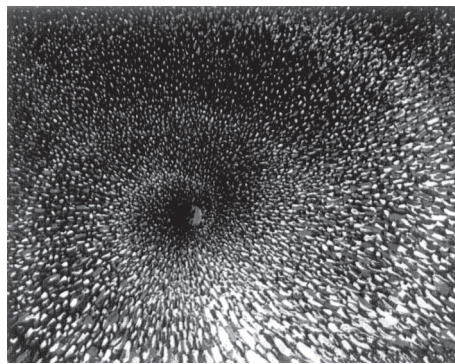


Fig. 3.20

Tabloul pictorului Emil Ciocoiu intitulat „Din haos, Doamne, am apărut”.

Combinând teoria fractalilor cu teoria haosului în urmărirea unei particule aflate în suspensie într-un lichid (mișcarea browniană) se constată că fractalii brownieni reprezintă urma unei mișcări browniene a cărei dimensiune fractală este mai mică decât 2.

Teoria haosului creează modele pentru fenomenele naturale care prezintă neliniaritate și feedback. Mitchell Feigenbaum a demonstrat că haosul este o proprietate universală a sistemelor cu feedback neliniar.

Definiție

Feedback – sau reacție inversă – este procesul prin care se aplică la intrarea unui sistem activ o parte din energia de la ieșirea lui.

Este utilizat în schemele amplificatoarelor, oscilatoarelor, sistemelor de reglare automată. Cu alte cuvinte, ieșirea influențează intrarea sistemului, modificându-i operarea. În cazul difuzoarelor, o parte din semnalul care iese este reintrodus în sistem și produce sunete ascuțite, distorsiuni în frecvență (feedback negativ). În cazul amplificatoarelor, semnalul este reintrodus voit (feedback pozitiv).

În economie, feedback negativ înseamnă beneficii reduse și feedback pozitiv – beneficii sporite.

În bursă fenomenul este asemănător: dacă prețurile cresc cererea scade, ceea ce duce la reajustarea prețurilor (scăderea lor).

Thom afirma că „Limbajul interdisciplinarității este în mod necesar matematic”. Matematicile nu sunt doar un simplu instrument de calcul și predicție, ci servesc și ca germen al unor structuri abstracte, precum obiectele fractale ale lui Mandelbrot sau atractorii stranii ai lui Ruelle.

Bibliografie

Prof. dr. Mircea Paul Tănăsescu – *Aplicații ale teoriei fractalilor în fizică* – Revista de fizică „Evrika, An X, nr. 5–6 (117–118) mai-iunie 2000.

Francis C. Moon – *Chaotic and fractal dynamics* – A Wiley – Interscience Publication, 1996.

Ziauddin Sardar, Ywona Abrams – *Câte ceva despre haos* – Curtea Veche, 2002.

Alain Boutot – *Inventarea formelor* – Ed. Nemira, 1996.

David Acheson – *From calculus to chaos. An introduction to dynamics* – Oxford University Press, 1997.

Benoît Mandelbrot – *Obiectele fractale* – Ed. Nemira, 1998.

Armin Bunde, Shlomo Havlin – *Fractals in Science* – Springer Verlag, 1996.

Charles Ruhla – *Les fractals, nouvelle géométrie de la nature* – Bulletin de L’union des Physiciens nr. 787, vol. 90, p. 1445, 1996.

H.G. Schuster – *Deterministic Chaos – An introduction* – Physik Verlag, Weinheim, 1984.

Dr. Heywang, *Physik für Fachhochschulen und technische Berufe*, Handwerk und Technik, Hamburg, 2005.

A. Timotin; V. Hortopan; A. Ifrim; M. Preda, *Lecții de bazele electrotehnicii*, Editura Didactică și Pedagogică, 1970.

I. Spânulescu; S. Spânulescu, *Circuite integrate digitale și sisteme cu microprocesoare*, Editura Victor, 1996.

P. Constantin; V. Buzuloiu; C. Rădoi; E. Ceanga; V. Neagoe, *Electronică industrială*, Editura Didactică și Pedagogică, 1980.

N.N. Gherbanovschi; O.S. Stoican, *Electronica fizică și aplicații*, Editura Academiei Române, 1994.

VI. Melnic, *Sisteme electronice de supraveghere*, Editura Teora, 2005.

E. Isac, *Măsurări electrice și electronice*, Editura Didactică și Pedagogică, 1999.

Cuprins

Capitolul 1 – Oscilații și unde mecanice	3
1.1. Oscilatorul mecanic	4
1.2. Oscilatori mecanici cuplați	13
Probleme propuse	20
1.3. Unde mecanice	23
Probleme propuse	47
Test recapitulativ	47
Rezolvările problemelor	50
 Capitolul 2 – Oscilații și unde electromagnetice	 53
2.1. Circuite de curent alternativ	54
Test de evaluare	89
Probleme propuse	89
2.2. Oscilații electromagnetice libere. Circuitul oscilant	97
Probleme propuse	110
2.3. Câmpul electromagnetic. Unde electromagnetice	112
Probleme propuse	141
Rezolvările problemelor	143
 Capitolul 3 – Optica ondulatorie	 147
3.1. Dispersia luminii(*). Interpretare electromagnetică	148
3.2. Interferența	150
3.3. Dispozitivul Young	153
Probleme propuse	159
3.4. Interferența localizată. Aplicații	164
3.5. (*) Difrakția luminii	170
3.6. (*) Rețeaua de difracție. Aplicații	172
3.7. (*) Polarizarea luminii. Aplicații	178
Test recapitulativ	183
Rezolvările problemelor	185
 Capitolul 4 – Elemente de teoria haosului	 187
4.1. (*) Determinism și predictibilitate. Condiții. Modele	188
4.2. (*) Determinism și impredictibilitate. Comportamentul haotic. Condiții	192
4.3. (*) Descrierea comportamentului haotic. Spațiul fazelor. Atractori clasici și atractori stranii	195
4.4. (*) Elemente de geometrie fractală	200
 Bibliografie	 207